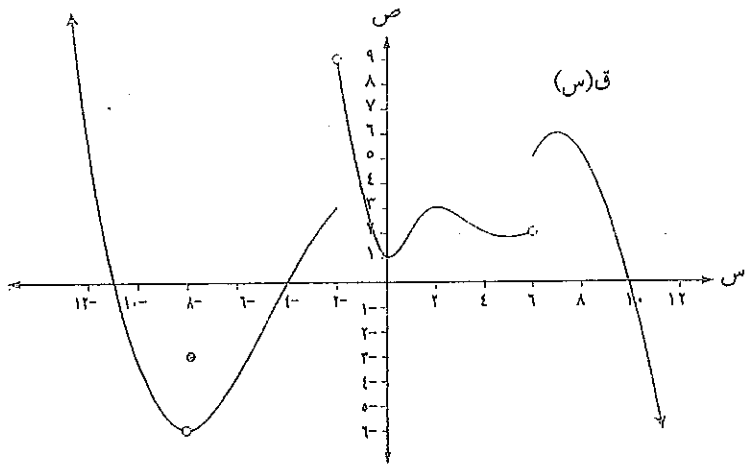
الوحدة الأولى
النهايات والأتصال
ثاني ثانوي علمي
حل أسئلة الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

٠٧٩٨٩ ٥٩٠٧١

١) معتمدًا الشكل (١–١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–١٠)

أ) $\lim_{س \to ٦^+}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٦^-}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

د) $\lim_{س \to -٢}$ ق (س)

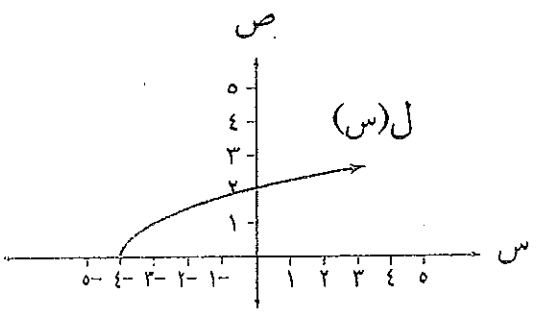
هـ) $\lim_{س \to -٨^+}$ ق(س)

و) $\lim_{س \to -٨^-}$ ق(س)

ز) $\lim_{س \to ١٠}$ ق(س)

٢) معتمدًا الشكل (١–١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{س + ٤}$

جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–١١)

أ) مجال الاقتران ل

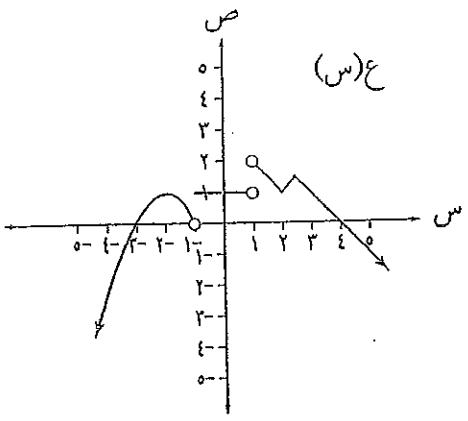
ب) $\lim_{س \to -٤^+}$ ل(س)

جـ) $\lim_{س \to -٤^-}$ ل(س)

د) $\lim_{س \to -٤}$ ل(س)

هـ) $\lim_{س \to ٠}$ ل(س)

٣) معتمدًا الشكل (١-١٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١-١٢)

أ) مجموعة قيم أ حيث:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \; ع(س) = ١$$

ب) مجموعة قيم جـ حيث:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow جـ^+} \; ع(س) = ١$$

جـ) مجموعة قيم ك حيث:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ك} \; ع(س) \text{ غير موجودة}$$

د) مجموعة قيم ل حيث:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ل} \; ع(س) = \text{صفرًا}$$

٤) إذا كان $ل(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س \in ص \\ س^{٢} + ٤ & ، س \notin ص \end{cases}$، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

فجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \; ل(س)$

س١ أ) $\lim_{س \to ٦^+} م(س) = ٥$

ب) $\lim_{س \to -٦} م(س) = ٣$

ج) $\lim_{س \to ٥} م(س) = ١$

د) $\lim_{س \to -٣} م(س)$ = غير موجودة

هـ) $\lim_{س \to -٨^+} م(س) = -٦$

و) $\lim_{س \to -٨^-} م(س) = -٦$

ز) $\lim_{س \to ١٠} م(س)$ = صفر

ح) $\lim_{س \to -٤} ل(س)$ = غير موجودة

ط) $\lim_{س \to -٤} ل(س)$ = غير موجودة

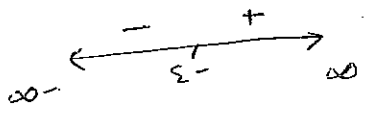
ي) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٢$

س٢ أ) $\lim_{س \to ٢} ك(س) = \sqrt{س + ٤}$

ب) مجال الاقتران ك .

نجد في الجذر الاقتران $س + ٤$

$س + ٤ = ٠ \Leftarrow س = -٤$



المجال $[-٤ ، \infty)$

ب) $\lim_{س \to -٤^+} ك(س)$ = صفر

س٣ أ) لتكن $م$ حيث

$\lim_{س \to ٢} ع(س) = ١$

$م$ (أ) $\cup \{-٣ ، ٢ ، ٣\}$.

ب) $[-١ ، ١) \cup \{-٣ ، ٢ ، ٣\}$.

ج) $\{-١ ، ١\}$.

د) $\{-٣ ، ٤\}$.

س٤ $\lim_{س \to ٢} ل(س) = ٢ \times ٢ + ١$

$= ٤ + ١$

$= ٥$.

١) إذا كان ق(س) = س^{٢} − س − ٦ ، ل(س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ١} \left(ق(س) + ل(س) \right)$

ب) $\lim_{س \to ١} ق(س) \times ل(س)$

جـ) $\lim_{س \to ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

د) $\lim_{س \to ٢} (ل(س))^{٤}$

هـ) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

٢)إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ٢ ع(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٢} ٣ ل(س) + ١ = ٧$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٢} \left(٢ ع(س) + ل(س) \right)$

ب) $\lim_{س \to ٢} \left(ع^{٣}(س) - ل^{٢}(س) \right)$

جـ) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{\frac{ل(س)}{ع(س)}}$

د) $\lim_{س \to ٢} \left(ع^{٢}(س) - ل^{٢}(س) \right)$

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٥^{+}} | س^{٢} - ٢٥ |$

ب) $\lim_{س \to ٥^{-}} | س^{٢} - ٢٥ |$

جـ) $\lim_{س \to ٢^{-}} | س - ٢ |$

د) $\lim_{س \to ٨} | س^{٢} - ٦٤ |$

هـ) $\lim_{س \to -٤} [س - ٢]$

و) $\lim_{س \to ١} \left(س [س] + | س | \right)$

ز) $\lim_{س \to ٥^{-}} \sqrt{٥ - س}$

ح) $\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^{٢}}$

ط) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س^{٢} + ٤س + ٤}$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهـــا $\sqrt{٦ - س}$ غير موجودة.
س←جـ

٥) إذا كان ق(س)= [٢ ، ٠ س]، فجد قيم جـ التي تجعل نهـــا [٢ ، ٠ س] = −١
س←جـ

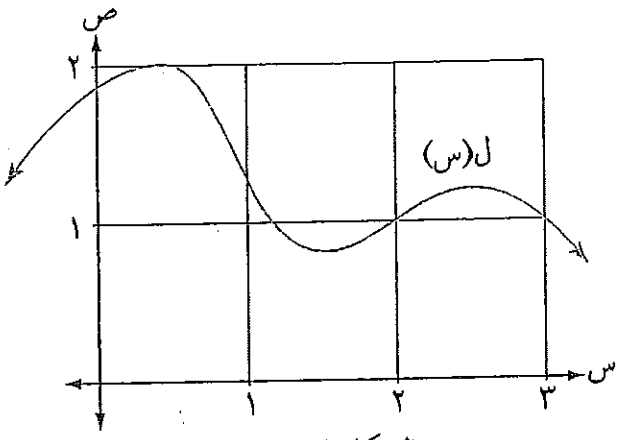
٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤ أ & ، \quad س \leq ٣ \\ [٦ - س] & ، \quad س > ٣ \end{cases}$

وكانت نهـــا ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.
س←٣

٧) معتمدًا الشكل (١−١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

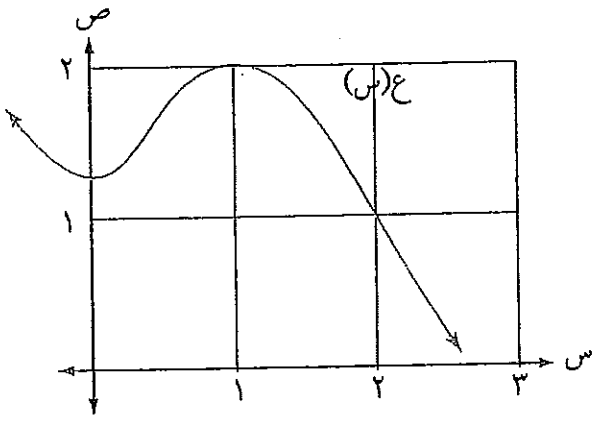
أ)نهـــا ل(٣ س − ٣)
س←٢

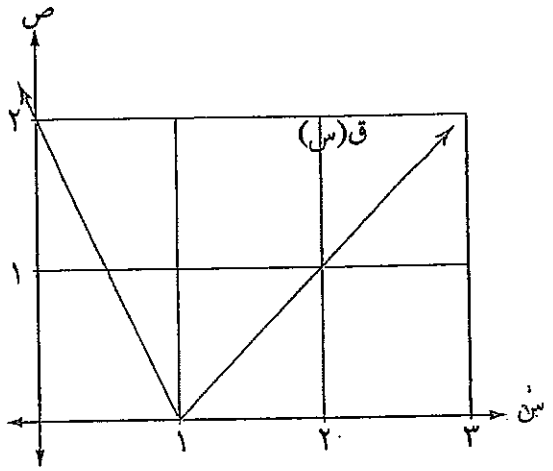
ب) نهـــا (س +ل (س))
س←٢



الشكل (١−١٥)

٨) معتمدًا الشكل(١−١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع ،جد كلًّا مما يأتي:





الشكل (١−١٦)

أ) نهـــا (ق(س) + ع(س))
س←١

ب) نهـــا (ق(س) × ع(س))
س←٢

جـ) $\lim_{س \to ١} \left(٢ \, ق(س - ١) + ع(س) \right)$

إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة $(-٣ ، ٤)$، وكانت $\lim_{س \to -٣} \left(س - ل(س) \right) = -١٠$

فجد $\lim_{س \to -٣} \left(ق^{٢}(س) - ٢ \, ل(س) \right)$

) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على $(س - ٢)$ يساوي ٥ ، فجد

$\lim_{س \to ٢} (٣ ع(س) + ٤ س^{٢})$

أ) $\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} س^٣ - ٦س$ ،

$ل(س) = س^٣ - ٤س - ٣$

ب) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ل(س)) =$

$(١ - ١ - ٦) + (١ - ٤ - ٣) = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} (م(س) \times ل(س)) =$

$-٦ \times -٤ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{ل(س)}{م(س)} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٢}{٣}$

د) $\lim_{س \to ٢} (ل(س))^٤ =$

$(٤ - ٢ \times ٤ - ٣)^٤ = (-٣)^٤$

$= ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)} =$

$\sqrt[٣]{١ - -٣} = \sqrt[٣]{٤}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ل(س)}{م(س)} =$

$\frac{١ + ٢ - ٣}{١ + ١ - ٦} = \frac{صفر}{-٤}$

$= صفر$

س٢ $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ١٠ \Leftarrow$

$\frac{١٠}{٢} = (\lim_{س \to ٢} ع(س)) \Leftarrow$

$\lim_{س \to ٢} ع(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} ل(س) = ٦ \Leftarrow ٧ = ١ + ل(٢) \Leftarrow \lim_{س \to ٢} ٣ل(س) + ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ل(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to ٢} (٢ع(س) + ل(س)) =$

$٢ \times ٥ + ٢ = ١٢$

ب) $\lim_{س \to ٢} (ع^٣(س) - ل^٢(س)) =$

$٥^٣ - ٢^٢ = ١٢٥ - ٤ = ١٢١$

د) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

ج) $\lim_{س \to ٢} (ع^٢(س) - ل^٢(س)) =$

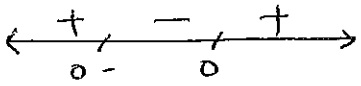
$= ٥^٢ - ٢^٢$

$= ٢١ = ٤ - ٢٥$

س٣

أ) $\lim_{س \to 5^+} |س^2 - 25|$

$س^2 - 25 = 0 \Leftarrow س = \pm 5$



$\lim_{س \to 5^+} |س^2 - 25| = \lim_{س \to 5^+} (س^2 - 25)$

$= صفر$

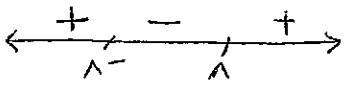
ب) $\lim_{س \to 5^-} |س^2 - 25| = \lim_{س \to 5^-} (25 - س^2)$

$= صفر$

جـ) $\lim_{س \to -2^-} |س - 2| = \lim_{س \to -2^-} (2 - س)$

$= صفر$

د) $\lim_{س \to 8} |س^2 - 64|$



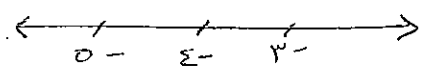
$\lim_{س \to 8^+} س^2 - 64 = صفر$

$\lim_{س \to 8^-} 64 - س^2 = صفر$

$\Leftarrow \lim_{س \to 8} |س^2 - 64| = صفر$

هـ) $\lim_{س \to -3} [س - 2]$

$ل = 1$



$[س-2] = \begin{cases} -7 & ، -5 \le س < -4 \\ -6 & ، -4 \le س < -3 \end{cases}$

$\lim_{س \to -3^+} [س-2] = -6$

$\lim_{س \to -3^-} [س-2] = -7$

$\Leftarrow \lim_{س \to -3}$ [س-2] غير موجودة

و) $\lim_{س \to 1} (س [س] + |س|)$

$[س] = \begin{cases} 0 & ، 0 \le س < 1 \\ 1 & ، 1 \le س < 2 \end{cases}$

$\lim_{س \to 1^-} (س \times 0 + س) = 0 + 1 = 1$

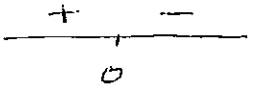
$\lim_{س \to 1^+} (س \times 1 + س) = 1 + 1 = 2$

$\lim_{س \to 1}$ (س [س] + |س|) = غير موجودة

ز) $\lim_{س \to 5^-} \sqrt{5 - س}$

$5 - س = 0$

$س = 5$

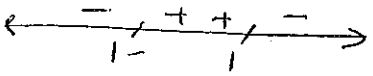


$\lim_{س \to 5^-} \sqrt{5 - س} = صفر$

تابع س٣

ج) $\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^{٤}}$

$١ - س^{٤} = صفر \leftarrow س = \pm ١$



$\lim_{س \to ١^{+}} \sqrt{١ - س^{٤}}$ = غير موجودة

$\lim_{س \to ١^{-}} \sqrt{١ - س^{٤}} = صفر$

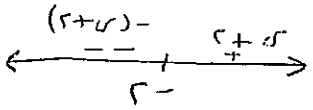
$\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^{٤}}$ = غير موجودة

د) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س^{٣} + ٤س + ٤}$

$\lim_{س \to -٢} \sqrt{(س+٢)^{٤}} = \lim_{س \to -٢} ا س + ٢ ا$

$س + ٢ = ٠$

$س = -٢$



$\lim_{س \to -٢^{+}} ا س + ٢ ا = صفر$

$\lim_{س \to -٢^{-}} ا س + ٢ ا = صفر$

$\lim_{س \to -٢} ا س + ٢ ا = صفر$

هـ) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$

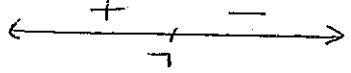
$\lim_{س \to ٤^{+}} \sqrt{س - ٤} = صفر$

$\lim_{س \to ٤^{-}} \sqrt{س - ٤}$ = غير موجودة

$\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$ = غير موجودة

و) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٦ - س}$

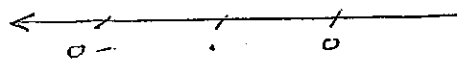
$٦ - س = صفر \leftarrow س = ٦$



$\lim_{س \to ٦^{+}} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة على $(\infty ، ٦]$

ز) $\lim_{س \to ٠,٥} [\![٢س]\!] = [\![٢ \times ٠,٥]\!]$

$ل = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = ٥$



$د(س) = \begin{cases} -١ & ، -٥ \leq س < ٠ \\ ١ & ، ٠ < س \leq ٥ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^{+}} [\![٢س]\!] = -١$

قيم ب هي $(-٥ ، ١)$

ح) $\lim_{س \to ٣} [\![٦ - س]\!] = ٣ \quad ، \quad ٢ < س \leq ٣$

$\lim_{س \to ٣^{+}} س^{٢} - ٤ = ٣$

$٩ - ٤ = ٣ \leftarrow ٩ - ٤ = ٣$

$\frac{٤}{٤} = \frac{٦}{٤}$

$\therefore ٤ = ٦ = \frac{٣}{٢}$

س٧ أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ل(س^٣ - ٣)}{س - ٢}$

$ص = س^٣ - ٣$

$س \to ٢ \Rightarrow ص \to ٣$

$= \lim_{ص \to ٣} \frac{ل(ص)}{ص - ٣}$

$= ١$

ب) $\lim_{س \to ٢} (س \times ل(س)) =$

$= \lim_{س \to ٢} س + \lim_{س \to ٢} ل(س)$

$= ٢ + ١ = ٣$

س٨

أ) $\lim_{س \to ١} (ه(س) + ع(س)) =$

$= \lim_{س \to ١} ه(س) + \lim_{س \to ١} ع(س)$

$= ص ف + ٢ = ٢$

ب) $\lim_{س \to ٢} (ه(س) \times ع(س)) =$

$= \lim_{س \to ٢} ه(س) \times \lim_{س \to ٢} ع(س)$

$= ١ \times ١ = ١$

جـ) $\lim_{س \to ١} (٢ ه(س - ١) + ع(س))$

$ص = س - ١$

$س \to ١ \Rightarrow ص \to ٠$

$= ٢ \lim_{ص \to ٠} ه(ص) + \lim_{س \to ١} ع(س)$

$= ٢ \times ٣ + ٢ = ٦$

س٩ ه كثير حدود ويمر بالنقطة $(-٣، ٤)$

فيكون $ه(-٣) = ٤$ ومنه $\lim_{س \to -٣} ه(س) = ٤$

$\lim_{س \to -٣} (س - ل(س)) = -١٠$

$\Leftarrow -٣ - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$\lim_{س \to -٣} ل(س) = ٧$

$\lim_{س \to -٣} ف(س) = \lim_{س \to -٣} ع ل(س)$

$ع^٢ = ٧ \times ٢ = ١٤ - ١٦ = ٢$

س١٠ لتكن ع كثير حدود وباقي القسمة على $س - ٢$ يساوي ٥ فيكون

$ع(٢) = ٥$ ومنها $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ٥$

$\therefore \lim_{س \to ٢} (٣ ع(س) + ع^٢(س)) =$

$= ٣ \times ٥ + ع(٢)^٢$

$= ١٥ + ١٦ = ٣١$

تمارين ومسائل

١) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١)^{٢} - ٨١}{(س-٨)}$

ب) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{\frac{س}{٢٠} - ٤}$

جـ) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{(٢+س)^{٢}} - \frac{١}{٤} \right)$

د) $\lim_{س \to -٢} \frac{|٣س+١| - ٥}{س^{٣} + ٨}$

هـ) $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س\sqrt{س+١}}{٩ - ٣س}$

و) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س^{٢} - ١٠س + ٢٥}}{س - ٥}$

ز) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^{٢} - ١}}{\sqrt{س - ١}}$

ح) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١}$

ط) $\lim_{س \to ٧^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}}$

ي) $\lim_{س \to ٢,٥} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$

ك) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س^{٢}} - \sqrt{١ - س^{٢}}}{س^{٢}}$

٢) إذا كان ق كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ ،

$\lim_{س \to ٣} (ق(س) - ٢س + ٣ ب) = ٧$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٣ - س}{|س - ٣|} & ، س \leq ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت جـ.

٤) إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^{٢} + ٢ ب س + ٢}{س - ١} = ١$ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب.

٥) جد $\lim_{س \to ٠} \frac{(٦٤)^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}}$

٦) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - ٢٧}{٢س^{٢} + ٦س + ١٨} & ، س \leq ع \\ س + ٥ & ، س > ع \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim_{س \to ع}$ ل(س) موجودة.

٧) إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

فجد قيم أ التي تجعل $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة.

٨) إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ ،وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

فجد قيمة الثابت ب.

٩) إذا كان هـ كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$ ،

$\lim_{س \to ٠}$ (هـ(س) − ٥ + ٣ جـ) = ٢ ، فجد قيمة الثابت جـ.

أ) نهـا $\frac{(س+١)^{٣}-١٨}{س-٨}$ $س \to ٨$ = $\frac{٠}{٠}$ نحل

نهـا $\frac{(س+١-٩)(س+١+٩)}{س-٨}$ $س \to ٨$

نهـا $\frac{(س-٨)(س+١٠)}{س-٨}$ $س \to ٨$ = ٨+١٠ = ١٨

ب) نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س}-٢}{\frac{س}{٢}-٤} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س}+٤}{\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س}+٤}$ $س \to ٨$

نهـا $\frac{س-٨}{٢(س-٨)(\sqrt[٣]{س^{٢}}+٢\sqrt[٣]{س}+٤)}$ $س \to ٨$

نهـا $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{١٢}$ $س \to ٢$ = $\frac{١}{٢٤}$.

جـ) نهـا $\frac{\frac{١}{س}\left(\frac{١}{(٣+س)^{٢}}-\frac{١}{٩}\right)}{}$ $س \to ٠$ =

نهـا $\frac{١}{س}\left(\frac{٩-(٩+٦س+س^{٢})}{٩(٣+س)^{٢}}\right)$ $س \to ٠$

نهـا $\frac{١}{س}\left(\frac{-٦س-س^{٢}}{٩(٣+س)^{٢}}\right)$ $س \to ٠$

نهـا $\frac{١}{س}\left(\frac{-س(٦+س)}{٩(٣+س)^{٢}}\right)$ $س \to ٠$

نهـا $\frac{-(٦+س)}{٩(٣+س)^{٢}}$ $س \to ٠$ = $\frac{-٦}{٩ \times ٩}$ = $\frac{-٢}{٢٧}$

د) نهـا $\frac{|٥-٣س+١|}{٨+س^{٣}}$ $س \to ٢$

نعيد تعريف $|٣س+١|$

$٣س+١ = ٠$ عند $س = -\frac{١}{٣}$

	$-\frac{١}{٣}$	
$٣س+١$	−	+
$-٣س-١$	+	−

نهـا $\frac{٥-(-٣س-١)}{٨+س^{٣}}$ $س \to -٢$ =

نهـا $\frac{٥+٣س+١}{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}$ $س \to -٢$

نهـا $\frac{٦+٣س}{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}$ $س \to -٢$ = نهـا $\frac{٣(٢+س)}{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}$ $س \to -٢$

= $\frac{٣}{٤+٤+٤}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$.

هـ) نهـا $\frac{\sqrt{٦-س}\sqrt{س+١}}{٩-٣س}$ $س \to ٣$ × $\frac{٦+س\sqrt{س+١}}{٦+س\sqrt{س+١}}$

نهـا $\frac{٣٦-س^{٢}(س+١)}{(٩-٣س)(٦+س\sqrt{س+١})}$ $س \to ٣$ = نهـا $\frac{٣٦-س^{٣}-س^{٢}}{١٢ \times (٩-٣س)}$ $س \to ٣$

نهـا $\frac{-س^{٣}-س^{٢}+٣٦}{١٢ \times (٣-س)}$ $س \to ٣$

نقسم $(-س^{٣}-س^{٢}+٣٦)$ على $(٣-س)$
بطريقة تركيبية أو طويلة لنجد الناتج .

تابع سؤال فرع (هـ).

$$\text{نهـا}_{س\to 3} \frac{(3-س)(س^3+4س+12)}{3(3-س)\times 12} =$$

$$\frac{3^3+12+12}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

(و) $\text{نهـا}_{س\to 5} \frac{س^3-10س+25}{5-س} =$

$$\text{نهـا}_{س\to 5} \frac{(5-س)^2}{5-س} = \text{نهـا}_{س\to 5} \frac{|5-س|}{5-س}$$

$5-س=0 \leftarrow س=5$

	$5-س$	$|5-س|$
$س<5$	+	$5-س$
$س>5$	−	$س-5$

$$|5-س| = \begin{cases} 5-س & ,\ س\le 5 \\ س-5 & ,\ س>5 \end{cases}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 5^+} \frac{س-5}{5-س} = \text{نهـا}_{س\to 5^+} -1 = -1$$

$$\text{نهـا}_{س\to 5^-} \frac{5-س}{5-س} = \text{نهـا}_{س\to 5^-} 1 = 1$$

$\text{نهـا}_{س\to 5} \frac{|5-س|}{5-س}$ غير موجودة.

(ز) $\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3-1}{|س-1|}$

$س^3-1=0 \leftarrow س=1$

$س-1=0 \leftarrow س=1$

	$س-1$	$|س-1|$
$س<1$	−	$1-س$
$س>1$	+	$س-1$

$س^3-1$ و $|س-1|$ غير قابلة للتحليل لعدد (1)

لذلك $\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3-1}{|س-1|}$ غير موجودة

$\Leftarrow$ $\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3-1}{|س-1|}$ غير موجودة

(ح) $\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3+3س-4}{س^3-1}$

نتائج تعويض العدد (1) في البسط = صفر $\leftarrow$ (1) أحد الأصفار $\Leftarrow$ $(س-1)$ أحد العوامل $\Leftarrow$ نقسم البسط على $(س-1)$ فينتج

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+4)}{(س-1)(س+1)} = \frac{6}{2} = 3$$

(ط) $\text{نهـا}_{س\to 7^+} \frac{س^2-49}{|س-7|}$

$س^2-49=0 \leftarrow س=\pm 7$

$س-7=0 \leftarrow س=7$

	$س-7$	$|س-7|$
$س<7$	−	$7-س$
$س>7$	+	$س-7$

كل من $س^2-49$ و $|س-7|$ تحوي على العدد (7)

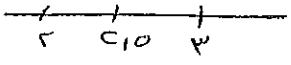
لذلك $\text{نهـا}_{س\to 7^+} \frac{س^2-49}{|س-7|} = \text{نهـا}_{س\to 7^+} \frac{(س-7)(س+7)}{س-7}$

$\text{نهـا}_{س\to 7} |س+7| = 14$.

تابع سؤال فرع (ي)

(ي) $\lim_{س \to ٢.٥} \frac{س^٢ - [س]}{٤س - ٢٥}$

نعيد تعريف $[س]$ $\quad ل = \frac{١}{٢}$



$$[س] = \begin{cases} ٥ & ، ٣ > س \geq ٢٫٥ \\ ٤ & ، ٢٫٥ > س \geq ٢ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٢.٥} \frac{س - ٥}{(٥+س)(٥-س)} = \frac{١}{١٠}$

$\lim_{س \to ٢.٥} \frac{س - ٤}{(٥+س)(٥-س)} = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

= غير موجودة

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢.٥} \frac{س - [س]}{٤س - ٢٥} =$ غير موجودة.

(ك) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١+س} - \sqrt{١-س}}{س} \times \frac{\sqrt{١+س} + \sqrt{١-س}}{\sqrt{١+س} + \sqrt{١-س}}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{١+س - (١-س)}{س(\sqrt{١+س} + \sqrt{١-س})}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{س \times ٢} = \frac{٢س}{٢س} = ١$

يمكن بما أن $\lim_{س \to ٣} \frac{٥ + ن(س)}{٣ - س} = ٤$

$\Leftarrow$ النهاية موجودة.

لكن ناتج تعويض المقام = صفر $\Leftarrow$

ناتج تعويض البسط = صفر.

$ن(٣) + ٥ = ٠ \Leftarrow$ صفر $ن(٣) = -٥$

وبما أن $\lim_{س \to ٣} ن(س) = -٥$ لأن $ن$ كثير حدود

$\lim_{س \to ٣} (ن(س) - ٢س + ٢ب) = ٧$

$ن(٣) - ٦ + ٢ب = ٧$

$-٥ - ٦ + ٢ب = ٧$

$-١١ + ٢ب = ٧$

$٢ب = ١٨ \leftarrow ب = ٦$

$س^٣ + ١س - ١٣ = س - ٣$ عندما $س > ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣}{س^٣ + ١س - ١٣} = \lim_{س \to ٣^+} (ج س^٤ - ٤)$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣}{س - ٣} = ٩ ج - ٤$

$\frac{-١٠}{+٤} = \frac{٩ ج - ٤}{+٤}$

$\frac{٩}{٩} = \frac{٩ ج}{٩}$

$ج = \frac{١}{٣}$

س٤ النهاية موجودة وتعريف المقام = صفر

فيكون تعريف البسط = صفر

$\Leftarrow$ $أ + ب + ٢ = صفر$

$ب = -٢ - أ \leftarrow ب + ٢ + أ = صفر$

$\boxed{ب = -١ - \frac{أ}{٢}}$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{أ س^{٢} + ٢ + س(-١ - \frac{أ}{٢}) + ٢}{١ - س} = ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{أ س^{٢} - ٢ - أس + أ + ٢}{١ - س} = ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{أ س^{٢} - أس}{١ - س} + \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٢(١ - س)}{١ - س} = ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{أ س(س - ١)}{١ - س} + ٢ = ١$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} أ س - ٢ = ١$$

$أ - ٢ = ١$

$\boxed{أ = ٣}$

$ب = -١ - \frac{أ}{٢}$

$ب = -١ - \frac{٣}{٢}$

$\boxed{ب = -\frac{٥}{٢}}$

س٥ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(٤)^{س} - ٨^{س}}{س}$

$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٨^{س} - ١}{س} = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٨^{س}(١ - ٨^{-س})}{س}$ (١)

$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - ٨^{-س}}{س}$

$\text{نهـا}_{س \to ٠} ٨^{س} \times ١ = ١ \times ١ = ١$

س٦ $\text{نهـا}_{س \to ٤} ل(س)$ موجودة $\Leftarrow$

$\text{نهـا}_{س \to ٤^{-}} ل(س) = \text{نهـا}_{س \to ٤^{+}} ل(س)$

$\text{نهـا}_{س \to ٤^{+}} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{٢(س^{٢} + ٣س + ٩)} = \text{نهـا}_{س \to ٤^{-}} (أس + ٥)$

$\frac{ع - ٣}{٢} = ٤ + ٥$

$ع - ٣ = ٢ع + ١٠$

$+٣ \quad +٣$

$ع = ٢ع + ١٣$

$-ع \quad -ع$

$-ع = ١٣ \Leftarrow ع = -١٣$

٧) $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة $\Leftarrow$

المقام $= صفر$

$س^٢ - ٥س + ٦ = صفر$

$(س - ٣)(س - ٢) = صفر$

$س = ٣ ، ٢$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ب س - ٣}{هـ(س) - ٦} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ب س - ٣}{س - ١} = \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س + ٣)(س - ١)}{س - ١} = ٤$

$\lim_{س \to ١} (س + ٣) = ٤$

$١ + ٣ + ب = ٤$

$ب = ٠$

٩) النهاية موجودة وتعويض المقام $=$ صفر

فيكون تعويض البسط $=$ صفر

$هـ(٠) + ٥ = صفر \Leftarrow هـ(٠) = -٥$

إذا $هـ(س) = -٥$ لأن $هـ$ كثير حدود

$\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ٣د) = ٢$

$-٥ + ٥ + ٣د = ٢$

$٣د + ١٠ - = ٢$

$+١٠ \quad +١٠$

$٣د = ١٢$

$\frac{٣د}{٣} = \frac{١٢}{٣}$

$\boxed{د = ٤}$

تمارين ومسائل

جد النهاية المطلوبة في كلٍّ من التمارين من (١) إلى (٢١) :

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } ٨س}{٦س}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س + \text{ظا } ٢س - \text{جا } س}{س}$

٣) $\lim_{س \to 0} (\text{قاس} + \text{ظا } ٥س)$

٤) $\lim_{س \to 0} (٧ س^{٣} \text{ ظتا}^{٢} (٢س) \text{ قتا } (٥س))$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{١ + \text{جتا } ٤س - ٢ \text{ جتا}^{٢} س}{س^{٢}}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتاس}}{س \text{ جاس}}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتاس}}{\pi - ٢س}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{س}$

٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جاس}}{(\pi - ٢س)^{٢}}$

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{قا}(٢س) - ١}{س^{٢}}$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{٢س^{٢} + س \text{ ظا } ٢س}{\text{جا}^{٢} س}$

١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{حتا}^{٢} س - \text{جا}^{٢} س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا } ٦س}{\text{جتا } ٨س - ١}$

١٤) $\lim_{س \to 0} ٣س(\text{ظتا } ٢س + \text{قتا } ٣س)$

١٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظتاس}}{\pi - ٢س}$

١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س \text{ جا} \frac{\pi}{س}}{س - ١}$

١٧) $\lim_{س \to -٤} \frac{جا(س+٤)}{س^{٢}-١٦}$

١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - جا س}{\sqrt{١ - جتا ٢س}}$

١٩) $\lim_{س \to \pi ٣} \frac{جا س}{\frac{س}{٣} - \pi}$

٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{ظا \pi س}$

٢١) $\lim_{س \to -أ} \frac{جا س + حا أ}{س + أ}$ (إرشاد: جاس + جا ص = ٢ جا$(\frac{س+ص}{٢})$ جتا$(\frac{س-ص}{٢})$

٢٢) إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أس}{٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{ب س - س} = ٦$ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

٢٣) إذا كان ق(س) = $\frac{جا(٢\pi - ٢س)}{-٥س}$ ، فجد $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٨س}{س٦} = \frac{٨}{٦}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س + ظاس - جاس}{س} =$

$= \lim_{س \to 0} (\frac{س}{س} + \frac{ظاس}{س} - \frac{جاس}{س})$

$= ١ + ١ - ٢ = ٠$

٣) $\lim_{س \to 0} (قاس + ظاس) =$

$= ١ + ٠ = ١$

٤) $\lim_{س \to 0} (٧س^{٣} ظتا(٤س) قتا(٥س))$

$= \lim_{س \to 0} (٧س^{٣} \times \frac{١}{ظا٤س} \times \frac{١}{جا٥س})$

$= \lim_{س \to 0} (٧ \times \frac{س}{ظا٤س} \times \frac{س}{ظا٤س} \times \frac{س}{جا٥س}) =$

$٧ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٤٠}$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{١ + جتا٤س - ٢ جتاس}{س^{٢}}$

تذكير: $(١ - جتا٢س = -جتا٢س)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا٤س - جتا٢س}{س^{٢}} =$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢ جا(\frac{٤س+٢س}{٢}) جا(\frac{٤س-٢س}{٢})}{س^{٢}} =$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢ جا٣س جاس}{س^{٢}} =$

$= \lim_{س \to 0} -٢ \frac{جا٣س}{س} \times \frac{جاس}{س} = -٢ \times ٣ \times ١$

$= -٦$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{س جاس} \times \frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢}س}{س جاس (١ + جتاس)} = \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}س}{س جاس (١ + جتاس)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس} =$

$= ١ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{٣س - ٢س}$

تعويض مباشر

$= \frac{جتا٠}{٣ \times ٠ - ٢} = \frac{١}{-٢}$

$= -\frac{١}{٢}$.

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س - جا س}{س^3} =$

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{ظا س}{س} - \frac{جا س}{س} \right) = 1 - 1 = صفر$

٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جا س}{(\pi - 2س)^2} \times \frac{1 + جا س}{1 + جا س} =$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جا^2 س}{(\pi - 2س)^2} \times \frac{1}{1+1} =$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا^2 س}{(\pi - 2س)^2} \times \frac{1}{2} =$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا^2(\frac{\pi}{2} - س)}{(2(\frac{\pi}{2} - س))^2} \times \frac{1}{2} =$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا^2(\frac{\pi}{2} - س)}{8(\frac{\pi}{2} - س)^2}$

$ص = \frac{\pi}{2} - س$
$س \to \frac{\pi}{2}$
$ص \to صفر$

$\lim_{ص \to 0} \frac{جا^2 ص}{8 ص^2}$

$\lim_{ص \to 0} \frac{جا ص}{8 ص} \times \frac{جا ص}{ص} =$

$\frac{1}{8} \times 1 = \frac{1}{8}$

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{قا(2س) - 1}{س^2} \times \frac{قا(2س) + 1}{قا(2س) + 1}$

$\lim_{س \to 0} \frac{قا^2(2س) - 1}{س^2 (1+1)} = \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 2س}{2 س^2}$

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا 2س}{2س} \times \frac{ظا 2س}{س} = 1 \times 2 = 2$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{2س^2 + س ظا 2س}{جا س}$ توزيع البسط على المقام

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{2س^2}{جا س} + \frac{س ظا 2س}{جا س} \right)$

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{2س}{جا س} \times \frac{س}{جا س} + \frac{س}{جا س} \times \frac{ظا 2س}{جا س} \right) =$

$2 \times 1 + 1 \times 2 = 2 + 2 = 4$

يمكن حل السؤال بقسمة كل حد على $س^2$

١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا س - جا س}{س - \frac{\pi}{4}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا 2س}{س - \frac{\pi}{4}}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - 2س)}{س - \frac{\pi}{4}} = \lim_{ن \to \frac{\pi}{4}} \frac{جا 2(\frac{\pi}{4} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$

$\lim_{ص \to 0} \frac{جا 2ص}{-ص} = -2$

$ص = \frac{\pi}{4} - س$
$س \to \frac{\pi}{4}$
$ص \to 0$

١٣) $\lim_{س\to 0} \frac{1-\text{جتا}٦س}{\text{جتا}٨س - 1} \times \frac{1+\text{جتا}٦س}{1+\text{جتا}٦س} \times \frac{\text{جتا}٨س+1}{\text{جتا}٨س+1}$

$= \lim \frac{1-\text{جتا}^2 ٦س}{\text{جتا}^2 ٨س - 1} \times \frac{\text{جتا}٨س+1}{1+\text{جتا}٦س}$

$= \lim \frac{\text{جا}^2 ٦س}{-\text{جا}^2 ٨س} \times \frac{(1+1)}{(1+1)}$

$= \lim \frac{\text{جا}٦س}{\text{جا}٨س} \times \frac{\text{جا}٦س}{\text{جا}٨س} \times 1 =$

$= -\frac{٦}{٨} \times \frac{٦}{٨} \times 1 = -\frac{٣٦}{٦٤} = -\frac{٩}{١٦}$

---

١٤) $\lim_{س\to 0} س \text{ ظتا}٣س (\text{ظتا}٢س + \text{قتا}٣س) =$

$= \lim س \text{ ظتا}٣س \text{ ظتا}٢س + \lim س \text{ ظتا}٣س \text{ قتا}٣س$

$= \lim \frac{س}{\text{ظا}٣س} \times \frac{\text{ظا}٢س}{٣س} \times \frac{٢س}{٢س} + \lim \frac{س}{\text{ظا}٣س} \times \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٣س}{\text{جا}٣س}$

$= \frac{٢}{٣} + 1 = \frac{٥}{٣}$

---

١٥) $\lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظتا}س}{س - \frac{\pi}{٢}} = \lim \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{(س - \frac{\pi}{٢})(\frac{\pi}{٢} - س)}$

$= \lim \frac{\text{ظا}ص}{ص(-ص)}$

$ص = \frac{\pi}{٢} - س$
$س \to \frac{\pi}{٢}$
$ص \to 0$

$= -\frac{1}{٢}$

---

١٦) $\lim_{س\to 1} \frac{س \text{ جا}\frac{\pi}{٢}س}{س - 1} = \lim \frac{-\text{جا}(\pi - \frac{\pi}{٢}س)}{-(1 - س)}$

$= \lim \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(1-س)}{(1-س)}$

$ص = 1 - س$
$س \to 1$
$ص \to 0$

$= \lim \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}ص}{ص} = \frac{\pi}{٢}$

---

١٧) $\lim_{س\to -٣} \frac{\text{جا}(س+٣)}{س^2 - ١٦} = \lim \frac{\text{جا}(س+٣)}{(س+٣)(س-٤)}$

$= \lim \left(\frac{\text{جا}(س+٣)}{س+٣} \times \frac{1}{س-٤} \right)$

$ص = س + ٣$
$س \to -٣$
$ص \to 0$

$= \lim \frac{\text{جا}ص}{ص} \times \frac{1}{-٧} = -\frac{1}{٧}$

$1 \times -\frac{1}{٧} = -\frac{1}{٧}$

---

١٨) $\sqrt{1 - \text{جتا}^2 س} = \sqrt{1 - (1 - \text{جا}^2 س)} =$

$= \sqrt{\text{جا}^2 س} = |\text{جا}س| .$

$\lim_{س\to 0^+} \frac{س - \text{جا}س}{\sqrt{1 - \text{جتا}^2 س}} = \lim_{س\to 0^+} \frac{س - \text{جا}س}{\sqrt{2}\,\text{جا}س}$

$= \lim_{س\to 0^+} \left(\frac{س}{\sqrt{2}\,\text{جا}س} - \frac{\text{جا}س}{\sqrt{2}\,\text{جا}س} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim_{س\to 0^-} \frac{س - \text{جا}س}{-\sqrt{1 - \text{جتا}^2 س}} = \lim_{س\to 0^-} \frac{س - \text{جا}س}{-\sqrt{2}\,\text{جا}س}$

$= \lim_{س\to 0^-} \left(-\frac{س}{\sqrt{2}\,\text{جا}س} + \frac{\text{جا}س}{\sqrt{2}\,\text{جا}س} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

$\therefore \lim_{س\to 0} \frac{س - \text{جا}س}{\sqrt{1 - \text{جتا}^2 س}}$ غير موجود .

١٩) $\lim_{س \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\text{ظا } س}{س - \frac{\pi}{3}} = \lim_{س \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\text{جا}(\pi - س)}{\pi - \frac{\pi}{3}}$

$\lim_{س \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\text{جا}\, ٣(\frac{\pi}{3} - س)}{\pi - \frac{\pi}{3}}$

$ص = \frac{\pi}{3} - س$
$س \to \frac{3\pi}{4}$
$ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\, ٣ص}{-ص} = -٣$

٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\text{ظا}\, \pi س} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-\text{ظا}(\pi - \pi س)}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-\text{ظا}(\pi - \pi س)}$

$ص = س - ٢$
$س \to ٢$
$ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-ص}{-\text{ظا}\, \pi ص} = \frac{١}{\pi}$

٢١) $\lim_{س \to -٢} \frac{\text{جا}\, س + \text{جا}\, ٢}{٢ + س}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{٢\, \text{جا}(\frac{٢ + س}{٢})\, \text{جتا}(\frac{٢ - س}{٢})}{٢ + س}$

$ص = ٢ + س$
$س \to -٢$
$ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{ص}{ص} \times \text{جتا}(-٢) \times \frac{١}{٢} \times ٢$

$= \text{جتا}(-٢)$

$= \text{جتا}\, ٢$

٢٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, ٢س}{س} = \frac{٢}{١} \Leftarrow ٦ = \frac{١٢}{٢} = \frac{\text{جا}\, ٢س}{س}$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, ٣س}{ب س - س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, ٣س}{س(ب - ١)} = \frac{٣}{ب - ١} = ٦$

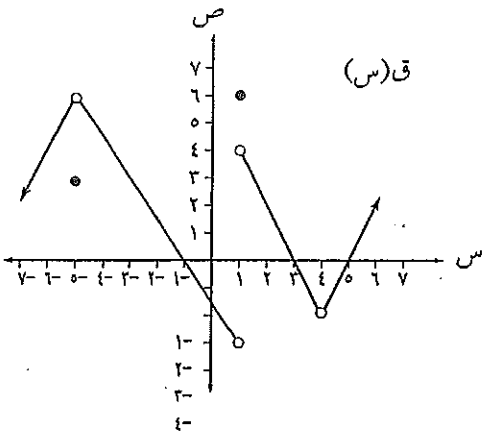
$٣ = ٦ب - ٦ \Leftarrow \frac{٩}{٦} = \frac{٦ب}{٦} \Leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

٢٣) $\text{جا}(٢\pi - ٢س) = -\text{جا}\, ٢س$.

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}(٢س - ٢\pi)}{-٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-\text{جا}\, ٢س}{-٥س} = \frac{٢}{٥}$.

١) معتمدًا الشكل (١-٢٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق غير متصل مع ذكر السبب ؟



الشكل (١-٢٧)

٢) إذا كان ق(س) = [٤ س − ٤] ،فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ١,٢٥

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\frac{١ - س^{٢}}{س - ١}$ عند س = ١

٤) ابحث في اتصال الاقتران هـ (س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ عند س = ٢

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{|\text{ظا س}|}{س} & ، \ س < ٠ \\ ١ - \text{جتاس} & ، \ س \leq ٠ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٠

٦) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \sqrt{س - ٣} & ، \ س < ٣ \\ |س^{٢} - ٩| & ، \ س \geq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = ٣

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{|س|-٢}{س-٢} & ، \ س \neq ٢ \\ ٥ & ، \ س = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س=٢

٨) إذا كان ك(س) = $\begin{cases} ٦+س & ، \ س \geq -٢ \\ ٢-س & ، \ -٢ \leq س < ٢ \\ ٢س-١ & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند س= ٢

٩) إذا كان ع (س) = $\begin{cases} \frac{أ}{س}+س^{٢} & ، \ ٠ < س \leq ٢ \\ [س]+٣ & ، \ ٢ < س < ٣ \\ ٧ & ، \ س = ٣ \end{cases}$

متصلًا عند س= ٢ ، فجد قيمة الثابت أ.

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣}+س^{٢}+٢س-٤}{س-١} & ، \ س \neq ١ \\ ٥س-١ & ، \ س = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س= ١

١١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+س & ، \ س < ٢ \\ [س+٤] & ، \ س = ٢ \\ \sqrt{س^{٢}+٥}+\frac{٦}{س} & ، \ س > ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

١٢) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ب & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ |س| - ٥ & ، \quad ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = ٢

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ س + ٥ & ، \quad س \ni ص \\ ٢ س^{٢} - ٤ & ، \quad س \notin ص \text{ حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣

١) الاقتران $ق$ غير متصل عند

$س = ٤ ، ١ ، -٥$

السبب: $ق(٤)$ غير معرف

$\lim_{س \to ٤} ق(س)$ غير موجودة

$\lim_{س \to -٥} ق(س) \neq ق(-٥)$

٢) $ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - جتا س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{-ظا س}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - جتا س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

١) $ق(٠) = ١ - جتا ٠ = ١ - ١ = صفر$

٢) $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ١ - ١ = صفر$

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \frac{-ظا س}{س} = -١$

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) \neq \lim_{س \to ٠^+} ق(س)$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} ق(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow ق(س)$ غير متصل عند $س = ٠$

٣) $ق(س) = [٤ س - ٤]$

$ل = \frac{١}{٤} = ٠,٢٥$

$ق(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ \leq س < ١,٢٥ \\ ١ & ، ١,٢٥ \leq س < ١,٥ \end{cases}$

١) $ق(١,٢٥) = ١$

٢) $\lim_{س \to ١,٢٥^+} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ١,٢٥^-} ق(س) = ٠$

$\lim_{س \to ١,٢٥^+} ق(س) \neq \lim_{س \to ١,٢٥^-} ق(س)$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١,٢٥} ق(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow ق(س)$ غير متصل عند $س = ١,٢٥$

$\therefore ق(س)$ غير متصل عند $س = ١,٢٥$

٤) $ق(س) = \frac{١ - س^٢}{١ - س}$ عند $س = ١$

$ق(١)$ غير معرف $\Leftarrow$

$ق(س)$ غير متصل عند $س = ١$

٥) $ق(س) = \frac{س^٤ - ٤}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

$ق(٢)$ غير معرف $\Leftarrow ق(س)$ غير متصل

عند $س = ٢$

٦) $ل(٣) = صفر$

$\lim_{س \to ٣} ل(س) = \begin{cases} \lim_{س \to ٣^+} ل(س) = صفر \\ \lim_{س \to ٣^-} ل(س) = صفر \end{cases} \Leftarrow \lim_{س \to ٣} ل(س) = صفر$

$\lim_{س \to ٣^+} ل(س) = ل(٣)$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = ٣$

٧ $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq 0 \\ -س & ، س < 0 \end{cases}$

س	$-\infty$		0		$\infty+$
$س-$	+	+	0	−	

$|س| = س$ حول $س = 2$

$م(س) = \begin{cases} \frac{س-2}{2-س} = -1 & ، س \neq 2 \\ 5 & ، س = 2 \end{cases}$

1) $م(2) = 5$

2) $\lim_{س \to 2} م(س) = -1$

3) $\lim_{س \to 2} م(س) \neq م(2) \Leftarrow$ $م$ غير متصل عند $س = 2$

٨ $ك(س) = 2س^2 - 1$ عند $س = 2$

$ك(2) = 2 \times 2^2 - 1 = 3$

$\lim_{س \to 2^+} ك(س) = 3$

$\lim_{س \to 2^-} ك(س) = 2 - 2 = 0$

$\Leftarrow \lim_{س \to 2} ك(س)$ غير موجودة $\Leftarrow$ $ك(س)$ غير متصل عند $س = 2$

٩ $ع(س)$ متصل عند $س = 2$

$\lim_{س \to 2^+} ع(س) = \lim_{س \to 2^-} ع(س)$

$\frac{ج}{2} + 3 = 2 + 3$

$\frac{ج}{2} + 3 = 5$

$\frac{ج}{2} = 1$

$\Leftarrow ج = 2$

١٠ $ل(س) = |س - 1| + 3$

$ل(1) = |1 - 1| + 3 = 3$

1) $\lim_{س \to 1^+} ل(س) = \lim_{س \to 1^+} (س - 1) + 3 = 3$

2) $\lim_{س \to 1^-} ل(س) = \lim_{س \to 1^-} -(س - 1) + 3 = 3$

3) $\lim_{س \to 1} ل(س) = ل(1)$ $\therefore ل(س)$ متصل عند $س = 1$

١١ $\lim_{س \to 2} م(س) = [3 + 3] = 6$

1) $م(2) = [3 + 3] = 6$

2) $\lim_{س \to 2^+} م(س) = \sqrt{3 + 5} + 3 = 3 + 3 = 6$

$\lim_{س \to 2^-} م(س) = 2^2 + 2 = 6$

$\lim_{س \to 2} م(س) = 6$

3) $\lim_{س \to 2} م(س) = م(2)$

$\therefore م$ متصل عند $س = 2$

١٢ $\lim_{س \to 2^+} ل(س) = \lim_{س \to 2^-} ل(س)$

$5 - 2 = 3 + ب \Leftarrow 3 - ب = 3 + ب$

$\Leftarrow ب = -3$

١٣ $\lim_{س \to 3} م(س) = 3 \times 3 + 5 = 14$

1) $\lim_{س \to 3} م(س) = 14$

2) $\lim_{س \to 3} م(س) = م(3)$

$\therefore م$ متصل عند $س = 3$

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} + ٥ & ، \quad -٢ \leq س < ١ \\ ٨ س & ، \quad ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ٢].

٢) إذا كان ل(س) = $|٢س - ١٠|$، فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة [−١٠، ٨].

٣) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - ٢٧}{٣ - س} & ، \quad س > ٣ \\ ٥ + س & ، \quad س \leq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على ح.

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \sqrt{٤ - س} & ، \quad س < ٤ \\ |س^{٢} - ١٦| & ، \quad س \geq ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

٥) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} ٥ & ، \quad س = ٣ \\ [س] + ٥ & ، \quad ٣ < س < ٤ \\ ٤ & ، \quad س = ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على الفترة [٣، ٤].

٣) إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} \sqrt{س + ١} & ، \quad ٠ \leq س < ٣ \\ [٠,٢٥\ س + ٢] & ، \quad ٣ \leq س < ٦ \\ |٩ - س| & ، \quad س = ٦ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠، ٦].

٤) إذا كان الاقتران ع(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{س^{٢} + ٢(هـ - ١)\ س - ٤هـ}{س - ٢} & ، \quad س \neq ٢ \\ ٥ + س & ، \quad س = ٢ \end{cases}$$

متصلًا على ح، فجد قيمة الثابت هـ.

٥) إذا كان ع(س) =
$$\begin{cases} ٢س & ، \quad س < ٢ \\ [٠,٥س + ٢] & ، \quad ٢ \leq س < ٤ \\ \dfrac{٥س}{س^{٢} - ٣٦} & ، \quad س \leq ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع لجميع قيم س الحقيقية.

٦) إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} [س] + س & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ \dfrac{٣س^{٢}}{٥} + \sqrt{س} & ، \quad ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [-١، ٢].

٧) إذا كان ل(س) = $\dfrac{س^{٢} + ٥س + ٢}{أ\ س^{٢} + س + ٣}$ ، فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

ل $م(س) = س^3 + 3س^2 + 5$ كثير حدود متصل على $(-\infty, \infty)$

$ك$ كثير حدود متصل على $(-\infty, \infty)$

نبحث الاتصال عند $س = -2$ ، 1 ، 2

$س = -2$

١) $م(-2) = -8 + 12 + 5 = 9$

٢) $\lim_{س \to -2^+} م(س) = \lim_{س \to -2^-} م(س) = 9$ ∴ $م$ متصل عند $س = -2$

٣) $\lim_{س \to -2^+} م(س) = 9$

$س = 1$

١) $م(1) = 9$

٢) $\lim_{س \to 1^+} م(س) = \lim_{س \to 1^-} م(س) = 9$ ∴ $م$ متصل عند $س = 1$

٣) $\lim_{س \to 1^+} م(س) = 9$

$\lim_{س \to 1^-} م(س) = 3(1)^2 + 5 = 8$

$س = 2$

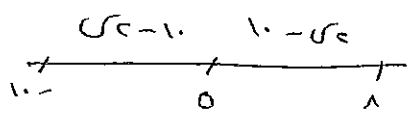
١) $م(2) = 3 \times 8 + 5 = 29$

٢) $\lim_{س \to 2^+} م(س) = \lim_{س \to 2^-} م(س) = 29$ ∴ $م$ متصل عند $س = 2$

٣) $\lim_{س \to 2^+} م(س) = 29$

$م$ متصل على $[-2, 2]$.

$ن(س) = \begin{cases} ك - 10 & ، 0 \leq س \leq 8 \\ 10 - ك & ، -10 \leq س < 0 \end{cases}$



$ك - 10$ كثير حدود متصل على $(0, 8)$

$10 - ك$ " " " $(-10, 0)$

$س = 0$

١) $ن(0) = 0$

٢) $\lim_{س \to 0^+} ن(س) = \lim_{س \to 0^-} ن(س) = 0$ ⟸ $\lim_{س \to 0} ن(س) = 0$

٣) $\lim_{س \to 0^+} ن(س) = 0$

$\lim_{س \to 0^-} ن(س) = 0$

٢) $\lim_{س \to 0} ن(س) = ن(0)$ ∴ $ن$ متصل عند $س = 0$

$س = 8$

١) $ن(8) = 16 - 10 = 6$

٢) $\lim_{س \to 8^+} ن(س) = 6$

٣) $\lim_{س \to 8^-} ن(س) = ن(8)$ ∴ $ن$ متصل عند $س = 8$

$س = -10$

١) $ن(-10) = 10 - (-10) = 20$

٢) $\lim_{س \to -10^+} ن(س) = 20$

٣) $\lim_{س \to -10^-} ن(س) = ن(-10)$

∴ $ن$ متصل عند $س = -10$

$ن$ متصل على $[-10, 8]$.

$\frac{س^3 - ٧س - ٦}{س - ٣}$ غير متصل عند $س = ٣$

$٥ + س$ كثير حدود متصل لجميع قيم $س > ٣$

نبحث الاتصال عند $س = ٣$

١) $هـ(٣) = ٥ + ٣ = ٨$

٢) $\lim_{س \to ٣^-} \frac{س^3 - ٧س - ٦}{س - ٣} =$

$\lim_{س \to ٣^-} \frac{(س-٣)(س^2 + ٣س + ٩) + ٧(س-٣)}{س - ٣} =$

$= (٩ + ٩ + ٩) - ٢١ = -٣$

٣) $\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ٥ + ٣ = ٨$

$\lim_{س \to ٣^-} هـ(س)$ غير موجودة

$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

$هـ(س)$ متصل على $ح - \{٣\}$

$د(س) = |س^2 - ١٦| = ١٦ - س^2$ عند $س \leq ٤$

$س^2 - ١٦$ ، $٤ - س$

٤

$\sqrt{٤ - س}$ متصل على $(-\infty, ٤]$ لأن ما داخل الجذر متصل وموجب.

$س^2 - ١٦$ كثير حدود متصل على $(٤, \infty)$

عند $س = ٤$

١) $د(٤) =$ صفر

٢) $\lim_{س \to ٤^-} د(س) = \lim_{س \to ٤^-} (١٦ - س^2) = ٠$

٣) $\lim_{س \to ٤^+} د(س) = \lim_{س \to ٤^+} \sqrt{٤ - س} = ٠$

$\lim_{س \to ٤^-} د(س) = \lim_{س \to ٤^+} د(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٤} د(س) = د(٤)$

$د(س)$ متصل عند $س = ٤$

$د(س)$ متصل على $ح$.

$س = [س]$ ، $٣ \leq س < ٤$

$س = ٣$ ، $٣ = س$

$هـ(س) = \begin{cases} ٥ & ٣ = س \\ ٨ & ٣ < س < ٤ \\ ٤ & ٤ = س \end{cases}$

٨ متصل على $(٤, ٣)$ (ثابت)

عند $س = ٣$

١) $هـ(٣) = ٥$

٢) $\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ٨$

٣) $\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) \neq هـ(٣)$

$هـ(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

عند $س = ٤$

١) $هـ(٤) = ٤$

٢) $\lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = ٨$

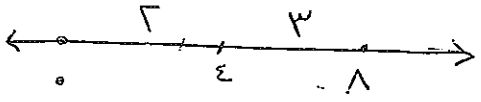
٣) $\lim_{س \to ٤^-} هـ(س) \neq هـ(٤)$

$هـ(س)$ غير متصل عند $س = ٤$

$هـ(س)$ متصل على $(٣, ٤)$.

س٦ $[0.25، س+2]$

$ل = \frac{1}{0.25} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$



$$م(س) = \begin{cases} \sqrt{س+1} & ، 0 \leq س < 3 \\ 3 & ، 3 \leq س < 4 \\ |س-9| & ، 4 \leq س < 6 \\ 6 = س & \end{cases}$$

$\sqrt{س+1}$ متصل على $[0، 3]$ لأنه داخل الجذر متصل وموجب.

3 متصل على $(4، 3)$ (ثابت)

$|س-9|$ متصل على $(4، 6)$ (ثابت)

عندما س = 3

1) $م(3) = 2$

2) $\lim_{س \to 3^-} م(س) = 2$

$\lim_{س \to 3^+} م(س) = 2$

$\Rightarrow \lim_{س \to 3} م(س) = 2$

3) $\lim_{س \to 3} م(س) = م(3)$ ∴ م متصل عند س = 3

عندما س = 4

1) $م(4) = 3$

2) $\lim_{س \to 4^+} م(س) = 3$

$\lim_{س \to 4^-} م(س) = 2$

$\Rightarrow$ النهاية غير موجودة

∴ م غير متصل عند س = 4.

عند س = 0

1) $م(0) = 1$

2) $\lim_{س \to 0^+} م(س) = 1$

3) $\lim_{س \to 0} م(س) = م(0)$

∴ م متصل عند س = 0

عند س = 6

1) $م(6) = |6-9| = 3$

2) $\lim_{س \to 6^-} م(س) = 3$

3) $\lim_{س \to 6} م(س) = م(6)$

∴ م متصل عند س = 6

∴ $م(س)$ متصل على $[0، 6] - \{4\}$.

س٧ ع متصل عند س = 2 $\Leftarrow$

$\lim_{س \to 2} ع(س) = ع(2)$.

$\lim_{س \to 2} \frac{س^3 + 2هـ س - 2س - 4هـ}{س - 2} = 5 + 2$

$\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 2س}{س - 2} + \lim_{س \to 2} \frac{2هـ س - 4هـ}{س - 2} = 7$

$\lim_{س \to 2} \frac{س(س-2)}{س-2} + \lim_{س \to 2} \frac{2هـ(س-2)}{س-2} = 7$

$2 + 2هـ = 7$

$2هـ = 5$

$هـ = \frac{5}{2}$.

$س^{٨}$ $[٥٫٠ س + ٢]$

$ل = \frac{١}{٠٫٥} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

$[٥٫٠ س + ٢] = ٣$ ، $٢ \leq س < ٤$

$$ع(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \leq س < ٤ \\ \frac{٥س}{س^{٢} - ٣٦} & ، س \geq ٤ \end{cases}$$

$ج$ كثير حدود متصل لجميع قيم $س < ٢$

٣ ثابت متصل على $(٤ ، ٢)$

$\frac{٥س}{س^{٢} - ٣٦}$ نسبي متصل $(\infty ، ٤) - \{٦\}$.

عندما $س = ٢$

١) $ع(٢) = ٣$

٢) $\lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ع(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٢} ع(س)$ غير موجودة

$ع(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

عندما $س = ٤$

١) $ع(٤) = \frac{٥ \times ٤}{١٦ - ٣٦} = \frac{٢٠}{-٢٠} = -١$

٢) $\lim_{س \to ٤^{-}} ع(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٤^{+}} ع(س) = -١$

$\lim_{س \to ٤} ع(س)$ غير موجودة

$ع(س)$ غير متصل عندما $س = ٤$

$ع(س)$ متصل على $ح - \{٦ ، ٤\}$

$م^{٩}(س) = [س]$ $\quad -١ \leq س < ٠$

$$م(س) = \begin{cases} -١ + ج & ، -١ \leq ج < ٠ \\ \frac{٣ج^{٢}}{٥} + ٧ج & ، ٠ \leq ج < ٢ \end{cases}$$

$-١ + ج$ كثير حدود متصل على $(-١ ، ٠)$

$\frac{٣}{٥}ج^{٢} + ٧ج$ متصل على $(٠ ، ٢)$ لأنه $\frac{٣}{٥}ج^{٢}$ كثير حدود وما داخل الجذر متصل وموجب.

عندما $س = ٠$

١) $م(٠) = ٠$

٢) $\lim_{س \to ٠^{-}} م(س) = -١$

$\lim_{س \to ٠^{+}} م(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٠} م(س)$ غير موجودة

$\therefore م(س)$ غير متصل عندما $س = ٠$

عندما $س = -١$

١) $م(-١) = -٢$

٢) $\lim_{س \to -١^{-}} م(س) = -٢$

$\lim_{س \to -١^{+}} م(س) = -١$

$\lim_{س \to -١} م(س)$ غير موجودة

$م$ متصل عندما $س = -١$

عندما $س = ٢$

١) $م(٢) = \frac{٣}{٥}ج^{٢} + ٧ج$

٢) $\lim_{س \to ٢} م(س) = \frac{٣}{٥}ج^{٢} + ٧ج$

$م(س)$ متصل عندما $س = ٢$

$م$ متصل $[-١ ، ٢] - \{٠\}$.

---

١٠) يجب أن يكون المقام $\neq$ صفر $\Leftarrow$ العبارة الرديفة لا تقل $\Leftarrow$ المميز سالب

$ب^{٢} - ٤أجـ$ < صفر

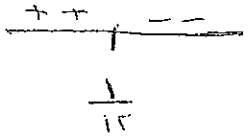
$١ - ٤ \times ٣ \times أ < ٠$

$١ - ١٢أ < ٠$

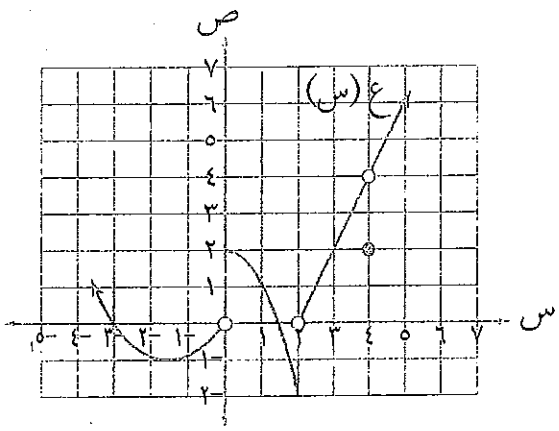
$١٢أ > ١$

$أ > \frac{١}{١٢}$

$أ = ٣ / ب = ١ / جـ = ٣$



١) معتمدًا الشكل(١-٣٠)، الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١-٣٠)

أ) $\lim_{س \to ٠^+}$ ع(س)

ب) $\lim_{س \to ٢^-}$ ع(س)

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ ع(س)

د) $\lim_{س \to ٤}$ ع(س)

هـ) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ع(س) غير موجودة.

و) مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند س = ب .

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦ ، فجد قيمة:

$$\lim_{س \to ١} (ق^٢ (٢س + ١) - س + ٢)$$

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣ - س}{|س - ٣|} & ، \quad س < ٣ \\ جـ س^٢ - ٤ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت جـ؟

٤) إذا كان ق(س) = $\dfrac{س^٢ + (أ + ١٣) س + أ}{س - ٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة.

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^{٢} - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} & ، س > ٥ \\ أ \text{ جتا } \dfrac{\pi}{٥} س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٦) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س - جا س}{\sqrt{١ - جتا ٢س}}$

ب) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س + جا ٢س}{٣س}$

جـ) $\lim_{س \to ١} \dfrac{١}{س - ١} \left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

د) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{س^{٢} - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

هـ) $\lim_{س \to -٣} \dfrac{\dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

و) $\lim_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س^{٣}} - ٢|س|}{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}$

ز) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س^{٢} + جا ٢س}{٣س}$

ح) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \dfrac{جتا س - \sqrt{٣} جا س}{٦ س - \pi}$

ط) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{قا ٢س - ١}{س^{٢}}$

ي) $\lim_{هـ \to ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٢} - جتا(\dfrac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$

ك) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{جتا ٣س - جتا ٥س}{٢ س^{٢}}$

٧) إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \dfrac{٤س^{٢} - جا ب س}{ب س - ظا ٤س} = \dfrac{١}{٤}$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^{٢}-٤|}{س-٢} & ، \quad س \neq ٢ \\ ٢ + س & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

٩) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} |\dfrac{س}{٢} - ١| & ، \quad -١ \leq س < ٣ \\ [٣ + ٠,٥س] & ، \quad ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ٣

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{٩س^{٢} - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^{٢}}} & ، \quad \dfrac{-١}{٣} < س < \dfrac{١}{٣} \\ -٢ & ، \quad س = \dfrac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & ، \quad \dfrac{١}{٣} < س < \dfrac{٤}{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = $\frac{١}{٣}$

١١) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) = $\sqrt{[س] + س}$ على الفترة (١، ٢] .

١٢) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، \quad س < ١ \\ ٢س\sqrt{س} - ١ & ، \quad س \leq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران هـ لجميع قيم س الحقيقية.

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢}-١}{س+١} & ، \quad -٢ \leq س < -١ \\ س[س] & ، \quad -١ \leq س < ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ١).

١٤) إذا كان ل(س) = $\frac{س^{٢}-١}{س+٢}$ ، هـ(س) = [س] ، فابحث في اتصال الاقتران ل × هـ على الفترة [٠، ٢]

١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات، كل فقرة لها أربعة بدائل مختلفة، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح في ما يأتي:

(١) إذا كانت $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦، فما قيمة $\lim_{س \to ١}$ (ق^{٢} (٢س+١) − س+٧)؟

أ) ١٧ ب) ١٣ جـ) ٢٠ د) ٣٧

(٢) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س=٤ ، وكان ٣ق(٤)=٦، وكانت $\lim_{س \to ٤^{+}}$ ق(س)=٤ب،

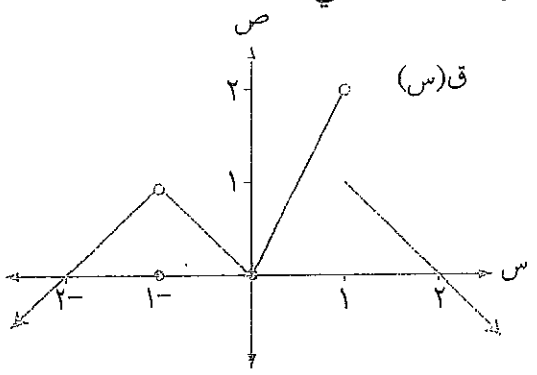
فإنَّ قيمة الثابت ب تساوي:

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) −٢

(٣) إذا كان ق اقترانَ كثير حدود ، وكانت $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{ق(س)}{س}$ = ٣ ، فإنَّ $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{ق^{٢}(س)}{س}$ تساوي:

أ) ٩ ب) ١٨ جـ) ٦ د) ٣٦

(٤) معتمدًا الشكل(١-٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرَّف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، فإنَّ مجموعة قيم أ حيث نهـــا ق(س) = صفرًا هي:
س ← أ



الشكل (١-٣١)

أ) {-٢ ، ٠}
ب) {٠}
جـ) {٠ ، ٢}
د) {-٢ ، ٠ ، ٢}

(٥) نهـــا $\frac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ تساوي:
س ← -٢

أ) -١ ب) صفر جـ) -٣ د) ٣

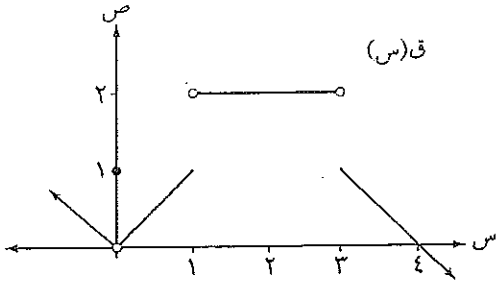
(٦) نهـــا $\frac{٦س^{٤} + ١٨س^{٢}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}}$ تساوي:
س ← ٠

أ) -٦ ب) -٢ جـ) ٣ د) ٩

(٧) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س= ١ ، وكان ق(١) = ٤ ، فإنَّ
نهـــا $\left(\frac{|س-١|}{س-١} + ق(س) \right)$ تساوي:
س ← ١+

أ) ٣ ب) ١ جـ) ٥ د) غير موجودة

(٨) معتمدًا الشكل (١-٣٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح، ما مجموعة قيم أ التي تجعل نهـــا ق(س) غير موجودة؟
س ← أ



الشكل (١-٣٢)

أ) {٠، ١، ٣} ب) {١، ٣، ٤} جـ) {٠، ١، ٣، ٤} د) {١، ٣}

(٩) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} ٢ \text{جتا}^{٢}س & ، \ س < \frac{\pi}{٢} \\ أ س^{٢} + \pi^{٢} & ، \ س \leq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإنَّ قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا عند س = $\frac{\pi}{٢}$ هي:

أ) -٢ ب) صفر جـ) -٤ د) ٤

(١٠) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ & ، \ س = ١ \\ [س] + ٥ & ، \ ١ < س < ٢ \\ ٤ & ، \ س = ٢ \end{cases}$

فإنَّ الاقتران ق متصل على الفترة:

أ) [١، ٢] ب) (١، ٢) جـ) [١، ٢) د) (١، ٢]

س١) أ) $\lim_{س \to ٠^+} ع(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to -٢} ع(س) = -٢$

ج) $\lim_{س \to ٣} ع(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٤} ع(س) = ٤$

هـ) $\{٠, ٢, ٦\}$

و) $\{٠, ٢, ٦, ٤, ٩\}$.

س٢) $ص = ٢س + ١$ $\quad س \to ١$ $\quad ص \to ٣$

$\lim_{س \to ١} ق(ص) + \lim_{ص \to ٣} (ع(ص))^٢ + ٢ - ١$

$٤^٢ + ١$

$١٦ + ١ = ١٧$

س٣) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{س - ٣} & س < ٣ \\ د س - ٤ & س \geq ٣ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} ق(س)$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣}{س - ٣} = ٩ د - ٤$

$١ - = ٩ د - ٤$

$\frac{٣}{٩} = \frac{٩ د}{٩} \Leftarrow د = \frac{١}{٣}$

س٤) لأن النهاية موجودة وتعريف المقام = صفر

فيكون تعريف البسط = صفر.

$ب^٢ + ٢ \times (١٣ + ب) + ٢ = صفر$

$ب^٢ + ٢ب + ٢٦ + ٤ = صفر$

$ب^٢ + ٢ب + ٣٠ = صفر \Leftarrow \frac{ب^٢ + ٢ب}{٢} = \frac{٣٠}{٢}$

$ب = -١٠$

س٥) $\lim_{س \to ٥} ق(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|}$

$\lim_{س \to ٥} \frac{|س - ٥| \times |س + ١|}{|س - ٥|} = |٥ + ١| = ٦$

$ق(س) = ب جتا \frac{\pi}{٢} س + ٥$

$ق(-٥) = ب جتا \frac{\pi}{٢}(-٥) + ٥$

$= ب \times ٠ + ٥ = ٥$

$\lim_{س \to -٥} ق(س) = \lim_{س \to ٥} ق(س)$

$٥ = ٥ - ب \Leftarrow ٦ = ٥ + ب - ٥$

$ب = -١$

س٦) أ) نعم يوجد في الفترة صفر ٤٨.

ب) $\lim_{ن \to ٠} \frac{ن + جا ٣ن}{٣ن} = \lim_{ن \to ٠} \left(\frac{ن}{٣ن} + \frac{جا ٣ن}{٣ن} \right)$

$= \frac{١}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١$

يمكن حل السؤال بقسمة كل حد على س.

س٦ ج) $\lim_{س\to 1} \frac{1}{1-س}\left(1-\frac{1}{\sqrt{س}}\right) =$

$= \lim_{س\to 1} \frac{1}{1-س} \times \frac{\sqrt{س}-1}{\sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}+1} =$

$= \lim_{س\to 1} \frac{1-س}{(1-س)(\sqrt{س}+1)(\sqrt{س}+1)} = \frac{-1}{(2)(2)} = -\frac{1}{4}$

د) $\lim_{س\to 4} \frac{س^3 - 4س^2}{(س-4)(3س^2+3)(\sqrt{س}+1)} =$

$= \lim_{س\to 4} \frac{س^2(س-4)}{(س-4)(3س^2+3)(\sqrt{س}+1)} =$

$= \frac{16}{16 \times 11} = \frac{1}{11}$

هـ) $\lim_{س\to 3} \frac{س^4 - 3س}{س^2 - 2\sqrt{س+1} - 1} =$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^4 - 3س}{((س-1)^2 - (2\sqrt{س+1})^2)} \times \frac{(س-1)+2\sqrt{س+1}}{(س-1)+2\sqrt{س+1}}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س(س^3-3) \times 4}{(س-1)^4 - (س+1)^2} =$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س(س^3-3) \times 4}{س^4 - 2س^3 + 6س^2 - 4س} =$

$= \lim_{س\to 3} \frac{(س^3-3) \times 4}{س^3 - 2س^2 + 6س - 4} = 4$

و) $|س| = س$ عند $س = 4$

$\lim_{س\to 4} \frac{\sqrt{3س} - 2س}{2س^2 - 5س - 12} \times \frac{\sqrt{3س}+2س}{\sqrt{3س}+2س}$

$= \lim_{س\to 4} \frac{3س - 4س^2}{(2س+3)(س-4)(\sqrt{3س}+2س)} =$

$= \lim_{س\to 4} \frac{س(3-4س)}{(2س+3)(س-4)(\sqrt{3س}+2س)} =$

$= \frac{-13}{11 \times 8} = -\frac{13}{88}$

ز) $\lim_{س\to 0} \frac{س^2 + جا 2س}{3س} =$

$= \lim_{س\to 0} \left(\frac{س^2}{3س} + \frac{جا 2س}{3س}\right) =$

$= \lim_{س\to 0} س + \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}$

ح) $\lim_{س\to 3} \frac{\frac{1}{س} + \frac{1}{3}}{س^2 - 2س - 3} =$

$= \lim_{س\to 3} \frac{3+س}{3س} \times \frac{1}{(س+1)(س-3)} =$

$= \frac{1}{(4)(-2)} = \frac{1}{-8}$

$= -\frac{1}{36}$

ط) $\lim_{س\to \frac{\pi}{6}} \frac{جتا س - \sqrt{3} جا س}{(س - \frac{\pi}{6})}$

$س - \frac{\pi}{6} = ص$ ، $س \to \frac{\pi}{6}$ ، $ص \to 0$

$س = ص + \frac{\pi}{6}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{جتا(ص+\frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} جا(ص+\frac{\pi}{6})}{ص}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{جتا ص جتا\frac{\pi}{6} - جا ص جا\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}(جا ص جتا\frac{\pi}{6} + جتا ص جا\frac{\pi}{6})}{ص}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} جتا ص - \frac{1}{2} جا ص - \frac{3}{2} جا ص - \frac{\sqrt{3}}{2} جتا ص}{ص}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{-2 جا ص}{ص} = -2$

تابع س٦ فرع ج .

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\text{جتا}\theta\,\text{جتا}\frac{\pi}{6}-\text{جا}\theta\,\text{جا}\frac{\pi}{6}-\text{جتا}\frac{\pi}{3}\left(\text{جا}\theta\,\text{جتا}\frac{\pi}{6}+\text{جتا}\theta\,\text{جا}\frac{\pi}{6}\right)}{6\theta}$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتا}\theta-\frac{1}{2}\text{جا}\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جا}\theta+\frac{1}{2}\text{جتا}\theta\right)}{6\theta}$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}\text{جتا}\theta}-\frac{1}{2}\text{جا}\theta-\frac{\sqrt{3}}{4}\text{جا}\theta-\cancel{\frac{1}{4}\text{جتا}\theta}}{6\theta}$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{-2\,\text{جا}\theta}{6\theta}=\text{نها}_{\theta\to 0}-\frac{1}{3}\frac{\text{جا}\theta}{\theta}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot$$

ط) أوجد (حلول في التمارين).

ي) $\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\text{جتا}\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}{\theta}$

$\frac{1}{2}=\text{جتا}\frac{\pi}{3}$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\text{جتا}\frac{\pi}{3}-\text{جتا}\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}{\theta}$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\theta\right)\text{جا}\left(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}-\theta}{2}\right)}{\theta}$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\text{جا}\left(-\frac{\theta}{2}\right)}{\theta}$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}-2\,\text{جا}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\theta}{2}\right)\times\text{نها}_{\theta\to 0}\text{جا}\frac{\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$-2\,\text{جا}\frac{2\pi}{3}\times\frac{1}{2}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

ك) $\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\text{جتا}3\theta-\text{جتا}5\theta}{2\theta^2}=$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{3\theta+5\theta}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{3\theta-5\theta}{2}\right)}{2\theta^2}=$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{-2\,\text{جا}4\theta\,\text{جا}(-\theta)}{2\theta^2}=$$

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{-4\,\text{جا}4\theta}{4\theta}\times\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\text{جا}(-\theta)}{\theta}=$$

$$-4\times 1=-4\cdot$$

ل) بالقسمة على س

$$\text{نها}_{\theta\to 0}\frac{\frac{5}{\theta}-\frac{\text{جا}3\theta}{\theta}}{\frac{4\theta}{\theta}-\frac{\text{ظا}4\theta}{\theta}}=\frac{1}{4}$$

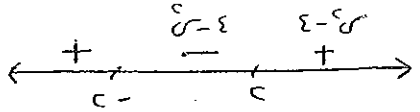
$$\frac{5-\text{ب}}{\text{ب}-4}=\frac{1}{4}$$

$$-4\text{ب}=\text{ب}-4$$

$$\frac{-5}{-5}\text{ب}=\frac{-4}{-5}$$

$$\text{ب}=\frac{4}{5}\cdot$$

س٨ $س^2 - ٤ = ٠ \leftarrow س = \pm ٢$



أ) $م(٢) = ٢ + ٢ = ٤$

ب) $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^2 - ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س-٢)(س+٢)}{س-٢}$

$= ٢ + ٢ = ٤$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٤ - س^2}{٢ - س}$

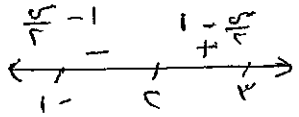
$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{(٢-س)(٢+س)}{٢-س}$

$= -(٢+٢) = -٤$

$\lim_{س \to ٢} م(س) =$ غير موجودة

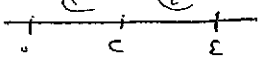
$م(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

س٩ $\frac{س^2}{٢} - ١ = ٠ \leftarrow س^2 = ٢ \leftarrow س = \pm ٢$



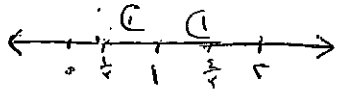
$ا(س) = \begin{cases} ١ - \frac{س}{٢} & ، -٢ \leq س \leq ٢ \\ \frac{س}{٢} - ١ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$[٠٫٥ س + ٣]$ $\quad ل = \frac{١}{٢} = ٢$



$[٠٫٥ س + ٣] = ٤$ ، $٣ \leq س < ٤$

س١٠ $[س] = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$



$ل(س) = \begin{cases} \frac{١ - ٩س^2}{|١ - ٣س|^2} & ، -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & ، س = \frac{١}{٣} \\ -٦س - ص & ، \frac{١}{٣} \leq س \leq ١ \\ -٦س - ١ & ، ١ \leq س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

أ) $ل(\frac{١}{٣}) = -٢$

ب) $\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} ل(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \frac{١ - ٩س^2}{|١ - ٣س|^2} = -٢$

$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^+} ل(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٣}^+} -٦س - ص = -٢ - ص$

$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} ل(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} -٦س - ١ = -٢ - ص$

$\lim_{س \to \frac{١}{٣}} ل(س) = -٢ - ص$

$ل(\frac{١}{٣}) = -٢$

$-٢ - ص = -٢ \leftarrow ص = ٠$

$ع(س) = \begin{cases} \frac{س^2}{٢} - ١ & ، ١ < س < ٣ \\ ١ - \frac{س}{٢} & ، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٤ & ، ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

أ) $ع(٣) = ٤$

ب) $\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٣^-} ع(س) = \frac{٣^2}{٢} - ١ = \frac{٧}{٢}$

$\Rightarrow \lim_{س \to ٣} ع(س)$ غير موجودة

$\therefore ع(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

تابع س١٠

$$\text{نها}_{س \to -\frac{1}{2}^-} \frac{9س^2 - 1}{|1 - 3س|}$$

$1 - 3س = 0 \leftarrow س = \frac{1}{3}$

	$3س - 1$	$1 - 3س$
	$+$	$-$

$\frac{1}{3}$

$$\text{نها}_{س \to -\frac{1}{2}^-} \frac{9س^2 - 1}{|1 - 3س|} = \text{نها}_{س \to -\frac{1}{2}^-} \frac{(3س - 1)(3س + 1)}{1 - 3س}$$

$$= \text{نها}_{س \to -\frac{1}{2}^-} -(3س + 1) = -(1 + 1) = -2$$

$\Leftarrow$ نها$_{س \to \frac{1}{3}}$ ل(س) = -2

٣) نها$_{س \to \frac{1}{2}}$ ل(س) = ل$(\frac{1}{3})$

∴ ل(س) متصل عند $س = \frac{1}{3}$.

عند $س = 2$

١) ع(٢) = $\sqrt{ج + 2}$ = $\sqrt{4}$ = ٢

٢) نها$_{س \to -2}$ ع(س) = $\sqrt{3}$

٣) ع(ج) ≠ نها$_{س \to -2}$ ع(س)

ع(س) غير متصل عند $س = 2$

∵ ع(س) متصل على (١، ٢) .

* لاتحقق الاتصال عند $س = 1$ لأن العدد (١) لا ينتمي للفترة (فترة مفتوحة).

س١١ ن س٣ كثير حدود متصل على (-∞، ∞)

كما أن $س - 1$ متصل على (١، ∞) لأنه كثير حدود وما داخل الجذر متصل وموجب.

عند $س = 1$

١) هـ(١) = $\sqrt{3 \times 1^2 - 1} = \sqrt{2} = 1$

٢) نها$_{س \to 1^+}$ هـ(س) = ١

نها$_{س \to 1^-}$ هـ(س) = ١ $\Leftarrow$ نها$_{س \to 1}$ هـ(س) = ١

٣) هـ(١) = نها$_{س \to 1}$ هـ(س)

∴ هـ(س) متصل عند $س = 1$

∴ هـ(س) متصل على ع.

س١٢ ع(س) = $\sqrt{[س] + س}$ (١، ٣) .

$$[س] = \begin{cases} 1 & ، 1 \le س < 2 \\ 2 & ، س = 2 \end{cases}$$

$$ع(س) = \begin{cases} \sqrt{س + 1} & ، 1 \le س < 2 \\ \sqrt{س + 2} & ، س = 2 \end{cases}$$

$\sqrt{س + 1}$ متصل على (١، ٢) لأنه داخل الجذر متصل وموجب.

١٣ س $[س] = \begin{cases} ٠ ، & ٠ \le س < ١ \\ -١ ، & -١ \le س < ٠ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} \frac{(س-١)(س+١)}{س+١} ، & -٢ \le س < -١ \\ -س ، & -١ \le س < ٠ \\ \text{صفر} ، & ٠ \le س < ١ \end{cases}$

$\frac{س-١}{س+١}$ نسبي متصل على $(-\infty ، -١)$ لأن المقام لا ينتمي للفترة.

$-س$ كثير حدود متصل على $(-١ ، ٠)$

صفر ثابت متصل على $(٠ ، ١)$

عند س = -٢

١) $هـ(-٢) = -(-٢) - ١ = -٣$

٢) $\lim_{س \to -٢^+} هـ(س) = -٣$

٣) $\lim_{س \to -٢^-} هـ(س) = \lim_{س \to -٢^+} هـ(س) = هـ(-٢)$ ∴ هـ متصل عند س = -٢

عند س = -١

١) $هـ(-١) = ١$

٢) $\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = ١$

٣) $\lim_{س \to -١^-} هـ(س) = -١ - ١ = -٢$

$\lim_{س \to -١^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to -١^-} هـ(س)$ ⇐ نهاية هـ عند س = -١ موجودة

∴ هـ غير متصل عند س = -١

عند س = ٠

١) $هـ(٠) = ٠$

٢) $\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = ٠$ ⇐ $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ٠$

٣) $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = هـ(٠)$

∴ هـ متصل عند س = ٠

عند س = ١

١) هـ(١) غير معرف

∴ هـ غير متصل عند س = ١

∴ هـ متصل على $[-٢ ، ١) - \{-١\}$.

١٤ س $هـ(س) = [س] = \begin{cases} ١ ، & ١ \le س < ٢ \\ ٠ ، & ٠ \le س < ١ \\ ٢ ، & س = ٢ \end{cases}$

$هـ(س) = (ل \circ هـ)(س) = \begin{cases} \frac{س^٢-١}{س+٢} ، & ١ \le س < ٢ \\ ٠ ، & ٠ \le س < ١ \\ \frac{٢(س^٢-١)}{س+٢} ، & س = ٢ \end{cases}$

$\frac{س^٢-١}{س+٢}$ نسبي متصل على $ح$ ما عدا -٢ لأن المقام لا ينتمي للفترة $(١ ، ٢)$

ثابت متصل على $(٠ ، ١)$.

عند س = ١

١) $هـ(١) = ٠$

٢) $\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ٠$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٠$ ⇐ $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٠$

٣) $\lim_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١)$

∴ هـ متصل عند س = ١

عند س = ٢

١) $هـ(٢) = \frac{٣}{٤}$

٢) $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \frac{٣}{٤}$

٣) $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) \neq هـ(٢)$

∴ هـ غير متصل عند س = ٢

هـ متصل على $[٠ ، ٢)$.

س١٥ (١) ص = ٢ك + ١

س ← ١ ، ص ← ٣

نهـا_{س←١} (ك(٢ك + ١) − ص + ٧)

= نهـا_{ص←٣} ق(ص) − ١ + ٧

٤ − ١ + ٧ = ٢٢ .

(٢) ∵ ق(٤) = ٦ ⇐ ق(٤) = ٢

بما أن ق متصل عند س = ٤ ⇐

نهـا_{س←٤+} ق(س) = نهـا_{س←٤−} ق(س) = ق(٤)

نهـا_{س←٤+} ق(س) = ٤ب

٢ = ٤ب ⇐ ب = ١/٢ (ب)

(٣) نهـا_{س←٢} ق(س)/س = ق(٢)/٢ = ٣ (ق كثير حدود متصل)

⇐ ق(٢) = ٦ .

نهـا_{س←٢} ق²(س)/س = ق²(٢)/٢ = ٦²/٢ = ٣٦/٢

= ١٨ (ب)

(٤) نهـا_{س←٣} ق(س) = صفر ص

{٣ ، ٦ ، ٣٠} (د)

(٥) نهـا_{س←٢} (٤ − س²)/(س − ٢) = نهـا_{س←٢} (٢ − س)(٢ + س)/(٢ − س) = صفر (ب)

(٦) نهـا_{س←٠} (٦س⁴ + ١٨س²)/(٢ك² − ٣ك) = نهـا_{س←٠} ك(٦ك² + ١٨)/ك(٢ − ٣ك)

= ١٨/٢ = ٩ (ج)

(٧) نهـا_{س←١+} ([س − ١١]/[س − ١] + ق(س)) =

نهـا_{س←١+} س/(س − ١) + نهـا_{س←١+} ق(س)

١ + ٤ = ٥ (أ)

(٨) نهـا_{س←٣} ق(س) غير موجودة عند ٣ ∈ {٢، ٣} (ج)

(٩) نهـا_{س←π/٢−} ٢ جتا²س = نهـا_{س←π/٢−} ٣ك² + π²

٢ جتا²(π/٢) = ٣(π/٤)² × ٢ + π²

صفر = ٣π²/٨ + π²

٣π²/٨ = −π² ⇐ ٣ = −π²/π² × ٨

٣ = −٨ (أ)

(١٠) ق(س) = { ٣ ، س = ١ ؛ ٦ ، ١ < س < ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ }

ق متصل على الفترة (١، ٢] (ب)