الاستاذ: صهيب شقيرات
ماستر رياضيات
0788879679

الاتصال.

- اتصال عند نقطة
- الاتصال على فترة.

الفصل الثاني من الوحدة الاولى.
(حسب الكتاب).

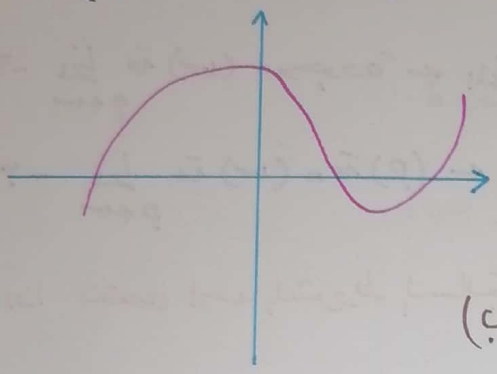
صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد
استعداد تام لاعطاء الدروس الخصوصية
داخل اربد و قرى غرب اربد

صهيب شقيرات 0788879679

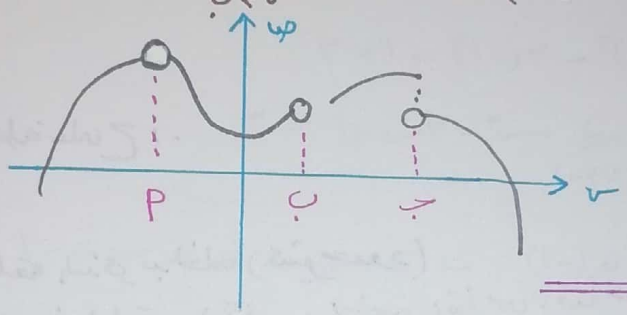
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس الخامس : الاتصال عند نقطة.

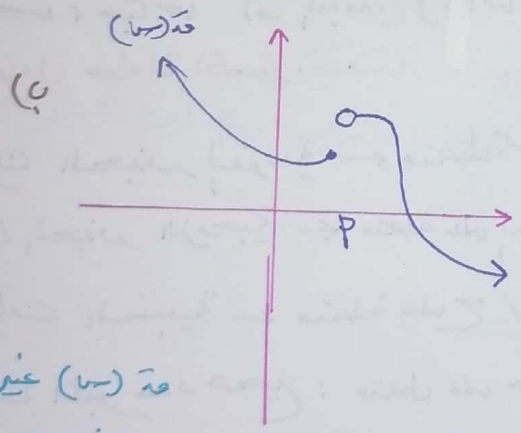
نقول انه ق(س) متصل عند س = P ، اذا كان منحنى الاقتران ق ليس له فجوة او انقطاع عند س = P ، اي اننا نستطيع رسم منحنى الاقتران ق حول النقطة (P ، ق(P)) ورورًا دون ان نرفع رأس القلم.



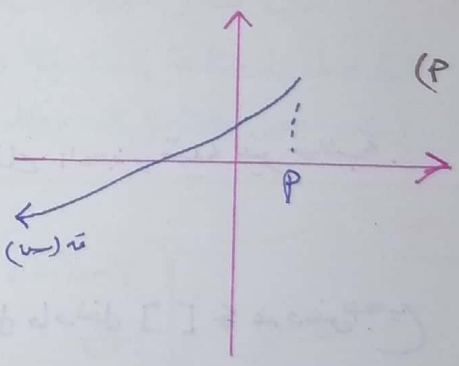
بينما في الشكل المجاور منحنى الاقتران غير متصل عند كل من P ، ب ، ج والسبب انه ق(P) غير موجودة وعند ب ، ق(ب) ≠ نهـا ق(س) وعند ج نهـا ق(ب) غير موجودة.



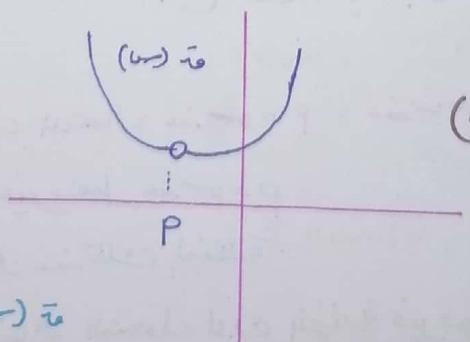
لاحظ الأشكال الآتية :-



ق(س) غير متصل عند س = P



ق(س) متصل عند س = P



ق(س) غير متصل عند س = P.

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

شروط الاتصال عند نقطة :-

يكون قا (س) متصل عند س = p اذا تحققت الشروط التالية :-

صهيب شقيرات
0788879679

١- قا (س) معرف عند س = p ← الصورة موجودة .

٢- $\lim_{س \to p}$ قا (س) موجودة ← النهاية (+) = النهاية (-) .

٣- $\lim_{س \to p}$ قا (س) = قا (p) ← النهاية = الصورة .

اذا نقص احد الشروط السابقة يكون قا (س) غير متصل عند س = p .

ملاحظات هامة

١) الاقترانات التالية متصلة على ح :-

- كثير الحدود
- اقتران العتبة المطلقة الذي بداخله (كثير حدود)
- جاس ، جتاس اما البواقي (ظاس ، ظتاس ، قاس ، قتاس) تتحول بدلالة (جاس/جتاس) وتعامل معاملة الكسور .

٢) اقتران الجذور الفردية ← متصلة على ح

اقتران الجذور الزوجية ← متصلة على الفترة التي تجعل ما داخل الجذر قيمه غير سالبة .

٣) الاقترانات النسبية ← متصلة على ح / اصفار المقام .

٤) اقتران اكبر عدد صحيح : متصل على جميع (ح) التي تجعل ما داخل [ ] ≠ عدد غير صحيح .
بشرط ان يكون لوحدة .

* اذا كان [ ] لوحدة وطلب الاتصال عند س = p ، نفوض مباشرة داخل [ ] اذا كان الناتج :

أ) عدد صحيح ← غير متصل عند س = p

ب) كسر ← متصل عند تلك النقطة .

← غير متصل عند نقاط التحول لان النهاية غير موجودة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١) ابحث في الاتصال الاقتران قا(س) عند النقطة المطلوبة :-

١) قا(س) = ٢س + ١ ، عند س = صفر

الحل :-

١- قا(٠) = ٢×٠ + ١ = ١ ← معرف.

٢- $\lim_{س \to ٠}$ قا(س) = $\lim_{س \to ٠}$ ٢س + ١ = ١ ← النهاية موجودة.

٣- $\lim_{س \to ٠}$ قا(س) = قا(٠) = ١ ← قا(س) متصل عند س = ٠

صهيب شقيرات
0788879679

٢) قا(س) = $س^{٣}$ - ٣س + ١ ، عند س = -١

الحل :-

١- قا(-١) = $(-١)^{٣}$ - ٣(-١) + ١ = ٣

٢- $\lim_{س \to -١}$ قا(س) = $\lim_{س \to -١}$ $س^{٣}$ - ٣س + ١ = ٣

٣- $\lim_{س \to -١}$ قا(س) = قا(-١) ← قا(س) متصل عند س ← -١

ملاحظة أي كثير حدود متصل على جميع الأعداد الحقيقية.

يمكن حل الأسئلة السابقة كما يلي : قا(س) متصل عند س = ρ لأن كثير حدود (لا داعي لكتابة الشروط والحل).

مثال (٢)

$$قا(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٤ & ، س \le ١ \\ \frac{٧}{س} & ، س = ١ \\ ٥س + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

ابحث اتصال قا(س) عند :-

ρ) س = ١ ب) س = ٤

الحل :- ρ) قا(١) = $\frac{٧}{١}$ = ٧

$\lim_{س \to ١^{-}}$ قا(س) = $\lim_{س \to ١^{-}}$ ٣×$(١)^{٢}$ + ٤ = ٣ + ٤ = ٧

$\lim_{س \to ١^{+}}$ قا(س) = $\lim_{س \to ١^{+}}$ ٥س + ٢ = ٥×١ + ٢ = ٧

$\lim_{س \to ١}$ قا(س) = ٧ ← قا(س) متصل عند س = ١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ق(١) = $\lim_{س \to ١}$ ق(س) ⇐ ق(س) متصل عند س = ١

ب) س = ٤ ، ق(٤) = ٥ × ٤ + ٢ = ٢٢

$\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ٥ × ٤ + ٢ = ٢٢

ق(٤) = $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) ⇐ ق(س) متصل عند س = ٤

مثال (٣) ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند النقاط المطلوبة :-

ق(س) = |س^{٢} - ٤| ، عند س = ٢

صهيب شقيرات
0788879679

الحل :- عند س = ٢

١) ق(٢) = |(٢)^{٢} - ٤| = |٠| = صفر

٢) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ |س^{٢} - ٤| = ٠

٣) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ |٤ - س^{٢}| = |٤ - ٤| = ٠

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) = صفر ⇐

ق(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) ← ق(س) متصل عند س = ٢ .

اقتران القيمة المطلقة متصل على ح :-

مثال (٤) ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س^{٢}+٧} & ، س \geq ٣ \\ \frac{٨}{٢-س} & ، س < ٣ \end{cases}$

ابحث الاتصال ق(س) عند س = ٣

الحل :- ق(٣) = $\frac{٨}{٢-٣} = \frac{٨}{-١} = -٨$

$\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ $\sqrt{س^{٢}+٧}$ = $\sqrt{٩+٧}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

$\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ $\frac{٨}{٢-س}$ = $\frac{٨}{٢-٣}$ = $\frac{٨}{-١}$

⇐ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) غير موجودة ⇐ ق(س) غير متصل عند س = ٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٥) ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٤ ، س = ١ .

$$ق(س) = [1 - \frac{س}{٤}]$$

الحل :- عند س = ٤

$$ق(٤) = [1 - \frac{٤}{٤}] = -1$$

$$\lim_{س \to ٤} ق(س) =$$

١) $\lim_{س \to ٤^+} = -٢ = -٢$

٢) $\lim_{س \to ٤^-} = -١ = -١$

$\lim_{س \to ٤} ق(س)$ غ م

ق(س) غير متصل عند س = ٤

عند س = ١

$$ق(١) = [1 - \frac{١}{٤}] = صفر$$

$$\lim_{س \to ١} ق(س) = [1 - \frac{س}{٤}] = صفر$$

$\lim_{س \to ١} ق(س) = ق(١)$ ← ق(س) متصل عند س = ١

ملاحظة اذا كانت نتيجة التعويض داخل اقتران اكبر عدد صحيح ، عدد غير صحيح يكون متصل فقط.

مثال (٦) اذا كان ق(س) = [٥ س - ٤] فابحث في اتصال الاقترانة ق عند س = ٧.

الحل : نعيد تعريف الاقتران ق(س) دون كتابة رمز اكبر عدد صحيح في فترة تحتوي العدد ٧ مثل [٦ ، ١٠)

$$د = \frac{١}{١٠ - ٥} = \frac{١}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

$$٥ س - ٤ =$$

$$س = \frac{٤}{٥} \Leftarrow س = \frac{١٠}{٥} \times ٤ = ٨$$

$٦ \leq س < ٨$

$٨ \leq س < ١٠$

صهيب شقيرات قصبة اربد 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$ق(س) = \begin{cases} -1 & ، 6 \geq س > 8 \\ صفر & ، 8 \geq س > 10 \end{cases}$$

نبحث في شروط الاتصال عند $س = 7$

ق معرف عند $س = 7$ ، حيث انه $ق(7) = 1$

$$\text{نها}_{س \to 7^+} ق(س) = \text{نها}_{س \to 7^-} ق(س) = -1$$

بما ان $\text{نها}_{س \to 7} ق(س) = ق(7) \Leftarrow$ ق(س) متصل عند $س = 7$

مثال (7): اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 3 & ، س \leq 3 \\ 5س - 3 & ، س > 3 \end{cases}$

ابحث اتصال ق عند $س = 3$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الحل:- $\text{نها}_{س \to 3^+} س^2 + 3 = 9 + 3 = 12$

$\therefore \text{نها}_{س \to 3^-} 5س - 3 = 5 \times 3 - 3 = 12$

$ق(3) = 9 + 3 = 12$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to 3} ق(س) = ق(3) \Leftarrow$ ق متصل عندما $س = 3$

مثال (8): $ق(س) = \begin{cases} 2س^2 - 1 & ، |س| \leq 2 \\ \dfrac{س^2 + 2س}{س + 2} & ، |س| > 2 \end{cases}$

ابحث الاتصال عند $س = 2$

الحل:- نستخدم خصائص القيمه المطلقة :-

$$ق(س) = \begin{cases} 2س^2 - 1 & ، س < 2 \ ، س \geq -2 \\ \dfrac{س^2 + 2س}{س + 2} & ، -2 > س > 2 \end{cases}$$

$ق(2) = 2 \times (2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ + ٢س}{س + ٢} = -٢$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ٢س^٢ - ١ = ٧$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة.

ق(س) غير متصل عند (س = ٢)

مثال (٩) ق(س) = جا س - جتا س ، عند $س = \frac{\pi}{٤}$

الحل: $ق(\frac{\pi}{٤}) = جا\frac{\pi}{٤} - جتا\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = صفر$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} ق(س) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}}$ جا س - جتا س = صفر

$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} ق(س) = ق(\frac{\pi}{٤})$ ← ق(س) متصل عند $(س = \frac{\pi}{٤})$

ملاحظة: (جا س ، جتا س) متصل على جميع الأعداد الحقيقية.

مثال (١٠)

$ق(س) = \begin{cases} \frac{جتا\ س^٢}{س} & ، س \neq صفر \\ ١ & ، س = صفر \end{cases}$

ابحث إتصال ق عند س = صفر

الحل: ١) ق(٠) = ١

٢) $\lim_{س \to ٠} ق(س) \leftarrow \lim_{س \to ٠} \frac{جتا\ |س|}{س}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠^+} \frac{جتا\ س}{س} = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠^-} \frac{جتا(-س)}{س} = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} ق(س) = ١$ ، موجودة.

$\Leftarrow$ ق(س) متصل عند س = ٠

ملاحظات هامة: الاقترانات النسبية غير متصلة عند أصفار المقام.

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

مثال (١١) : ق(س) = $\frac{٣س^٢ - ٤}{س - ٢}$ غير متصل عند س = ٢

هـ(س) = $\frac{٢س - ١}{(س^٢ - ٤)}$ $س^٢ - ٤ = (س - ٢)(س + ٢)$

غير متصل عند س = ٢، -٢.

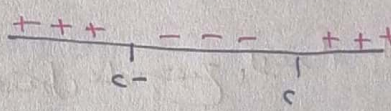
مثال (١٢) : ق(س) = $\frac{٢س + ٧}{س^٢ + ب س + ١}$ جد قيمة ب ، بحيث يكون ق(س) متصلاً على ح.

الحل:- يجب ان تكون المقام ≠ صفر أي ان المميز $(ب^٢ - ٤ أ جـ) < ٠$

$ب^٢ - (٤ \times ١ \times ١) < ٠$ ، $ب^٢ - ٤ < ٠$

نحولها الى معادلة : $ب^٢ - ٤ = ٠ \Leftarrow ب = \pm ٢$

نقرس لإشارة



قيم ب هي لكل ب ∈ (-٢، ٢)

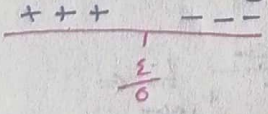
مثال (١٣) : ق(س) = $\frac{٣س + ٤}{٥ + ٤س - ٢س^٢ p}$ جد قيم p بحيث يكون ق(س) متصلاً على ح.

الحل: يجب ان يكون المقام ≠ صفر اي ان المميز $(ب^٢ - ٤ أ جـ) < ٠$

$(-٤)^٢ - (٥ \times p \times ٤) < ٠ \Leftarrow ١٦ - ٢٠p < ٠$

نحولها الى معادلة $١٦ - ٢٠p = ٠$

$٢٠p = ١٦ \Leftarrow p = \frac{١٦}{٢٠} = \frac{٤}{٥}$



قيم p هي لكل ب ∈ $(\frac{٤}{٥}، ص)$

ملاحظة:

١- الاقترانات المتشعبة عند نقاط التشعب قد تكون متصلة وقد تكون غير متصلة.

٢- في اقتران [ق(س)] عندما يكون لوحدة يكون غير متصل عندما ق(س) ∉ ص لأن الخانة تكون غير موجودة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١٤) جد قيم س ∈ ح التي يكون قا(س) غير متصل عندها.

الحل:-

(١) قا(س) = [س + ٥]

⇐ [س] + ٥ قا غير متصل عندما س ∈ ص

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

(٢) قا(س) = $\left[\frac{س}{٣} - ٢\right] = \left[\frac{س}{٣}\right] - ٢$

⇐ قا غير متصل عندما $\frac{س}{٣}$ ∈ ص ← س ∈ ٣ص

(٣) قا(س) = [٣س + ١] = [٣س] + ١

⇐ قا غير متصل عندما ٣س ∈ ص ← س ∈ $\frac{ص}{٣}$

(٤) قا(س) = (س^{٢} - ٤)[س + ٣]

⇐ تكون $\lim_{س \to p}$ قا(س) غير موجودة لكل p ∈ ص إلا عند اصفار المقدار

س^{٢} - ٤ = ٠ ← س = ± ٢

∴ قا غير متصل لكل س ∈ ص - [-٢ ، ٢]

(٥) قا(س) = $\frac{س - ٧}{[س] - ٢}$

⇐ اصفار المقام : [س] - ٢ = ٠ ⇐ [س] = ٢

← ٢ ≤ س < ٣ = [٢ ، ٣)

واضحا $\lim_{س \to p}$ [س] - ٢ غير موجودة لكل p ∈ ص

فتكون $\lim_{س \to p}$ قا(س) غير موجودة لكل p ∈ ص - {٧} اصفار البسط

∴ قا غير متصل لكل p ∈ ص ∪ [٢ ، ٣) - {٧}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١٥) : $ق(س) = \begin{cases} \frac{ظا ٢ب س}{س} & ، س < ٠ \\ ٣س + ٢ب^{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$ ما قيمة ب اذا كانت $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ موجودة.

الحل: $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} ق(س)$

$\leftarrow \lim_{س \to ٠^-} \frac{ظا ٢ب س}{س} = \lim_{س \to ٠^+} (٣س + ٢ب^{٢})$

$٢ب^{٢} = ب$

$٢ب^{٢} - ب = ٠$

$ب(٢ب - ١) = ٠ \Leftarrow ب = ٠ ، ب = \frac{١}{٢}$

نظريات في الاتصال :-

اذا كان $ق ، هـ$ اقترانين متصلين عند $س = ب$ ، فإن :-

١- $ق(س) \pm هـ(س)$ متصل عند $س = ب$

٢- $ق(س) \times هـ(س)$ متصل عند $س = ب$

٣- $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متصل عند $س = ب$ ، بشرط $هـ(ب) \neq ٠$

بمعنى : متصل $\pm$ متصل = متصل.

متصل $\times$ متصل = متصل.

$\frac{\text{متصل}}{\text{متصل}}$ = متصل.

$\neq ٠$

البرهان: اذا كان $ق ، هـ$ اقترانين متصلين عند $س = ب$ فأثبت ان $ق(س) + هـ(س)$ متصل عند $س = ب$.

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاثبات: بفرض $ق$ ، $هـ$ متصلين عند $س = p$ ، $ق(p)$ ، $هـ(p)$ معرفة

$\leftarrow$ $\lim_{س \to p}$ $ق(س)$ موجودة ، $\lim_{س \to p}$ $هـ(س)$ موجودة .

$\leftarrow$ $\lim_{س \to p}$ $ق(س) = ق(p)$ ، $\lim_{س \to p}$ $هـ(س) = هـ(p)$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

نفرض $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$

$ل(p) = ق(p) + هـ(p)$ $\leftarrow$ معرفة

$\lim_{س \to p} ل(س) = \lim_{س \to p} ق(س) + \lim_{س \to p} هـ(س) = ق(p) + هـ(p) = ل(p)$

$\lim_{س \to p} ل(س) = ل(p) \leftarrow ل(س)$ متصل عند $س = p$

$\Leftarrow ق(س) + هـ(س)$ متصل عند $س = p$ #.

ملاحظة: يمكن اثبات الطرح والضرب والقسمة بنفس الطريقة.

مثال (١٦): اذا كان $ق(س) = س^٢ + ٥س$ ، $هـ(س) = ٣س - ١$

ادرس في اتصال $ق(س) \times هـ(س)$ عند $س = ٢$

الحل: $ط_١$: تطبيق على نظريات الاتصال.

$ق(س)$ متصل عند $س = ٢$ لانه كثير حدود.

$هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$ لانه كثير حدود.

$(ق(س) \times هـ(س))$ متصل عند $س = ٢$ وذلك حسب نظريات الخاصيات.

$ط_٢$: طريقة الدمج : نفرض $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$

$ل(س) = (س^٢ + ٥س)(٣س - ١) = ٣س^٣ - س^٢ + ١٥س^٢ - ٥س$

$ل(س) = ٣س^٣ + ١٤س^٢ - ٥س$ ، $ل(س)$ متصل عند $س = ٢$ ، لانه كثير حدود

$(ق(س) \times هـ(س))$ متصل عند $س = ٢$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١٧) اذا كان ق(س) = { س٢ + ٢س ، س > ٣ ؛ ٤س + ٣/(س-٢) ، س ≤ ٣ }

هـ(س) = [س/٢ + ٥] وكان ل(س) = ق(س) - هـ(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ٣.

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الحل:- نبحث اتصال ق(س) عند س = ٣

ق(٣) = ١٢ + ٣ = ١٥

نهـ س→٣+ ق(س) = ١٢ + ٣ = ١٥

نهـ س→٣- ق(س) = ٩ + ٦ = ١٥

∴ نهـ س→٣ ق(س) = ١٥ = ق(٣)

∴ ق متصل عند س = ٣

نبحث اتصال هـ(س) عند س = ٣

هـ(٣) = [٣/٢ + ٥] = ٦

نهـ س→٣ هـ(س) = [٦,٥] = ٦

∴ هـ(٣) = نهـ س→٣ هـ(س)

∴ هـ(س) متصل عند س = ٣

∴ ل(س) متصل عند س = ٣ لان ناتج طرح متصلين.

مثال (١٨) ناقش صحة العبارة التالية:

اذا كانت ق + هـ متصلاً عند س = ٢ ، فاوجد كل من ق ، هـ يجب ان يكون متصلاً.

الحل: العبارة خاطئة ، لان ق يكون ق + هـ متصلاً عند نقطه ولكن كل من الاقترانين غير متصل عند تلك النقطه ، مثال ذلك. ق(س) = ٦ - [س] ، هـ(س) = ٣ + [س]

فإن ق(س) + هـ(س) = ٩ ، كل من ق(س) ، هـ(س) غير متصل لكل س ∈ ص ولكن ق + هـ متصل.

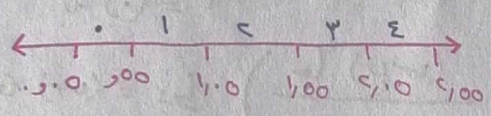
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١٩) ابحث في اتصال $\frac{\text{ق}(س)}{\text{هـ}(س)}$ عند $س = ٥/٦$ ، حيث ق$(س)$ = $[٢س - ١ ، ٠]$ ،

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س \leq ٥/٦ \\ \frac{س}{س - \frac{٥}{٦}} & ، س > ٥/٦ \end{cases}$$

الحل: بالمعادة نعرف $[٢س - ١ ، ٠]$



$س = ٠٫٥$ ، $ل = ٥٫٠$

ق$(س) = ٤$ ، $٢٫١٥ \geq س > ٢٫٥٥$

ق$(س)$ متصل عند $س = ٥/٦$ لانه على صورة كثير حدود.

$\text{هـ}(٥/٦) = ٥/٦ - ١ = ١/٥$

$\lim_{س \to ٥/٦^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٥/٦^+} (س - ١) = ١/٥$

$\lim_{س \to ٥/٦^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٥/٦^-} \frac{س}{س - \frac{٥}{٦}} = \frac{\frac{٥}{٦}}{\frac{٥}{٦} - \frac{٥}{٦}} = \frac{\frac{٥}{٦}}{\frac{١٠}{٦}} = ١/٥$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٥/٦} \text{هـ}(س) = ١/٥$

$\lim_{س \to ٥/٦} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٥/٦) = ١/٥$ $\leftarrow$ اذاً هـ$(س)$ متصل عند $س = ٥/٦$

$\frac{\text{ق}(س)}{\text{هـ}(س)}$ متصل عند $س = ٥/٦$ وذلك حسب نظريات الاتصال.

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٢٠)

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^2(ب س) - س^2}{س \text{ جا} ٢س} & ، \ -\dfrac{\pi}{٤} \leq س < ٠ \\ ٢ & ، \ س = ٠ \\ \dfrac{س^2 + (١ - ب)س}{ب س} & ، \ ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$$

حيث $ب \neq ٠$ ، اذا كان ق$(س)$ متصلا عند $س = ٠$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الحل:

$$\text{ق}(٠) = ٢$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \text{ ق}(س) = \text{نها}_{س \to ٠} \left(\frac{\text{جا}^2(ب س)}{س \text{ جا} ٢س} - \frac{س^2}{س \text{ جا} ٢س} \right)$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ب س}{س} \times \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ب س}{\text{جا} ٢س} - \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س^2}{س \text{ جا} ٢س}$$

$$= ب \times \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{جا} ب س}{س}}{\frac{\text{جا} ٢س}{س}} - \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا} ٢س} = ب \times \frac{ب}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{ب^2}{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{ب^2}{٢} - \frac{١}{٢} = ٢ \leftarrow \frac{ب^2}{٢} = \frac{٥}{٢} \leftarrow ب^2 = ٥ \leftarrow \boxed{ب = \pm \sqrt{٥}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{س^2 + (١ - ب)س}{ب س} = \frac{٠ + ١ - ب}{ب} = ٢$$

$$١ - ب = ٢ب \leftarrow ٣ب = ١ \leftarrow \boxed{ب = \frac{١}{٣}}$$

ملاحظة: في حالة ان احد الاقترانين وكليهما غير متصل نحل السؤال بطريقة الدمج ثم نفحص ان كان متصلاً ام لا.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٢١): اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س \geq 1 \\ ٣ + ٢س & ، س < 1 \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \geq 1 \\ -٢ & ، س < 1 \end{cases}$ ابحث في الاتصال

$(ق(س) + هـ(س))$ عند $س = 1$

الحل: لاحظ ان كل من $ق(س)$ ، $هـ(س)$ غير متصلين عند $س = 1$

∴ نلجأ للدمج.

نفرض $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$

$ل(س) = \begin{cases} س^2 + ٢س & ، س \geq 1 \\ ٢س + 1 & ، س < 1 \end{cases}$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

- $ل(1) = (1)^2 + ٢ \times (1) = ٣$
- $\lim_{س \to 1^-} ل(س) = \lim_{س \to 1^-} (س^2 + ٢س) = ٣$
- $\lim_{س \to 1^+} ل(س) = \lim_{س \to 1^+} (٢س + 1) = ٣$

$\lim_{س \to 1} ل(س) = ٣$ ←

$ل(س)$ متصل عند $س = 1$ اي ان $(ق(س) + هـ(س))$ متصل عند $س = 1$

مثال (٢٣): اذا كان $ق(س) = [س + ٢] - [س - 1]$ ، ابحث في اتصال $ق(س)$ عند $س = 1$

الحل: $ق(س) = [س] + ٢ - ([س] - 1) = [س] + ٢ - [س] + 1$

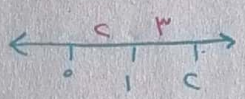
$ق(س) = ٣$

اقتران متصل عند $(س = 1)$ لانه على صورة كثير الحدود.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ط ٢ : الحل باستخدام العادة المتعارف

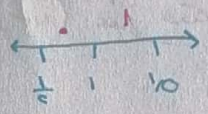
(١) $[س+٢]$



$س = ٢$ ، $ل = ١$

$$[س+٢] = \begin{cases} ٢ & ، ٠ \le س < ١ \\ ٣ & ، ١ \le س < ٢ \end{cases}$$

(٢) $[٢س - ١]$



$س = \frac{١}{٢}$ ، $ل = ٢$

$$[٢س - ١] = \begin{cases} ٠ & ، \frac{١}{٢} \le س < ١ \\ ١ & ، ١ \le س < ١٫٥ \end{cases}$$

في حالات الفترات كانت مختلفه ، ندمج بتحقيق شروط الاتصال .

$\therefore$ ق (١) $= ٣ - ١ = ٢$

$$\left.\begin{array}{l} \text{نها}_{س \to ١^+} \text{ ق}(س) = ٣ - ١ = ٢ \\ \text{نها}_{س \to ١^-} \text{ ق}(س) = ٢ - \text{صفر} = ٢ \end{array}\right\} \text{نها}_{س \to ١} \text{ ق}(س) = ٢$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \text{ ق}(س) = \text{ ق}(١) = ٢$$

ق (س) متصل عند $س = ١$.

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس السادس : الاتصال على فترة

نقول ان ق(س) متصل على تعين س = p ، اذا وفقط كان :-

١ $\lim_{س \to p^+}$ ق(س) موجودة

٢ ق(p) معرفه

٣ $\lim_{س \to p^+}$ ق(س) = ق(p)

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

ونقول ان ق(س) متصل على يسار س = p ، اذا وفقط كان :-

١ $\lim_{س \to p^-}$ ق(س) موجودة

٢ ق(p) معرفة

٣ $\lim_{س \to p^-}$ ق(س) = ق(p)

القواعد العامة في الاتصال :-

١ الاقتران كثير الحدود متصل على جميع الاعداد الحقيقة (-∞ ، ∞)

٢ الاقتران النسبي متصل على ح / { اصفار المقام }

٣ اقتران القيمه المطلقه متصل على ح ، لكن اذا ورد المطلق في اقتران متشعب يجب اعادة تعريفة .

٤ الجذور الفردية متصلة على ح بشرط ان يكون ما داخلها كثير حدود

٥ الجذور الزوجية متصلة في مجالها (ما داخل الجذر ≥ ٠)

٦ (جا ، جتا) متصلة على ح .

٧ اكبر عدد صحيح متصل اذا كانت ناتج التعويض عدد غير صحيح وغير متصل عندما يكون ناتج التعويض عدد صحيح ، لكن اذا ورد اكبر عدد صحيح في الاتصال على فترة يجب اعادة التعريف

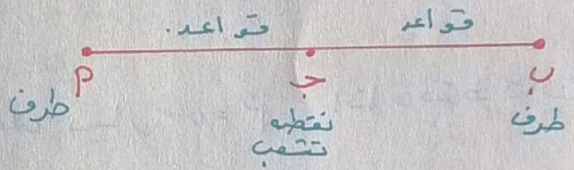
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاتصال على فترة $[p, ب]$

توضيح

$$ق(س) = \begin{cases} \text{قاعدة} & ، \ p \leq س < ج \\ \text{صورة} & ، \ س = ج \\ \text{قاعدة} & ، \ ج < س \leq ب \end{cases}$$

← يوجد للاقتران ق(س) قاعدتين وعند $س = ج$ ، نسمى صورة.



ملاحظات

١) اذا كان المجال للاقتران فترة مفتوحة او نصف مفتوحة لا نناقش الاطراف المفتوحة.

٢) اذا كان ق(س) متصلاً على $ح$ فإنه يكون متصلاً على كل فترة جزئية منه.

٣) اذا كان ق(س) متصلاً على $[p, ب]$ هذا لا يعني انه متصلاً عند $p, ب$.

خطوات البحث في اتصال اقتران على فترة:

أ) نبحث الاتصال كل قاعدة لوحدها حسب نوعها من الفترة المفتوحة المقابلة لها (الفترات الجزئية).

ب) نبحث الاتصال عند نقاط التحول (التشعب)
(عند نقاط التحول نطبق شروط الاتصال الثلاثة عند نقطة التشعب)

ج) نبحث اتصال اطراف الفترات المغلقة ان وجدت:
- البداية من اليمين
- النهاية من اليسار.

د) نعطي الملخص او النتيجة لجميع الخطوات السابقة.

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١) ابحث اتصال $ق(س) = \begin{cases} 3 - س^2 & ، -2 \leq س < 1 \\ س + 1 & ، 1 \leq س \leq 2 \end{cases}$ في الفترة $[-2, 2]$

الحل :-

أ) القواعد

$ق(س) = 3 - س^2$ ، $-2 < س < 1$ (متصل لأنه كثير حدود)

$ق(س) = س + 1$ ، $1 < س < 2$ (متصل لأنه كثير حدود)

ب) نقطة تحول.

$\left.\begin{array}{l} \text{نها}_{س \to 1^-} (3 - س^2) = 2 \\ \text{نها}_{س \to 1^+} (س + 1) = 2 \end{array}\right\} \Leftarrow$ ∴ متصل عند $س = 1$

$\text{نها}_{س \to 1} ق(س) = ق(1) = 2$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

ج) الأطراف.

$\text{نها}_{س \to -2^+} (3 - س^2) = ق(-2) = -1$

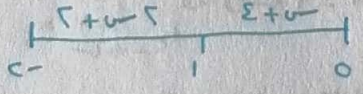
$\text{نها}_{س \to 2^-} (س + 1) = ق(2) = 3$

∴ متصل على الفترة $[-2, 2]$

مثال (٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} 2س + 2 & ، -2 \leq س < 1 \\ س + 4 & ، 1 \leq س \leq 5 \end{cases}$

فأبحث في اتصال الاقتران ق على الفترة $[-2, 5]$

الحل :



$[-2, 1)$ ق متصل لأنه كثير الحدود.

$(1, 5]$ ق متصل لأنه صورة كثير حدود.

نبحث اتصال $س = 1$ ، $ق(1) = 1 + 4 = 5$

$\text{نها}_{س \to 1^+} ق(س) = 5$ ، $\text{نها}_{س \to 1^-} ق(س) = 4$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to 1} ق(س)$ غير موجودة ∴ ق غير متصل عند $س = 1$

$\Leftarrow$ ق متصل على $[-2, 5] - [1]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٣) : ابحث في اتصال قا(س) = { ٣جتاس ، $\frac{\pi}{2} > س \geq 0$ ، $\frac{ظا٣س}{س}$ ، $0 > س > \frac{\pi}{2}$

الحل :- أ) القواعد.

$\frac{ظا٣س}{س} = \frac{جا٣س}{س جتا٣س}$ متصل لان البسط والمقام متصلين.

(جا٣س/جتا٣س/س) واصفار المقام $\notin (0 ، \frac{\pi}{2})$

ب) نقطة التحول :

قا(٠) = ٣

$\lim_{س \to 0^-}$ قا(س) = $\lim_{س \to 0^+}$ قا(س) = ٣

متصل عند س = ٠ ∴ متصل على $(\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2})$

مثال (٤) : سؤال موجود في صفحة ٦٨

ابحث في اتصال الاقتران قا على الفترة [-٢،٢].

س١ اذا كان قا(س) = { ٣س٢ + ٥ ، -٢ ≤ س < ١ ، ٨س ، ١ ≤ س ≤ ٢

الحل :- ٣س٢ + ٥ : كثير حدود ← متصل على الفترة (-٢،١)

٨س : كثير حدود ← متصل على الفترة (١،٢)

التحول س = ١

$\lim_{س \to 1^+}$ قا(س) = $\lim_{س \to 1^-}$ قا(س) = قا(١) = ٨

الاطراف :

قا(-٢) = $\lim_{س \to -2^+}$ قا(س) = ١٧

قا(٢) = $\lim_{س \to 2^-}$ قا(س) = ١٦

← قا متصل على [-٢،٢]

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٥) ابحث في اتصال على الفترة $[0,3]$

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \overline{\text{ا}[س]} + \overline{\text{ا}س} & ، \ 0 \le س < 2 \\ \dfrac{2س+1}{س+2} & ، \ 2 \le س < 3 \\ |س-5| & ، \ س = 3 \end{cases}$$

الحل نعيد تعريف اكبر عدد صحيح

$س = 0$ ، $ل = 1$

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \overline{\text{ا}س} & ، \ 0 \le س < 1 \\ \overline{\text{ا}س+1} & ، \ 1 \le س < 2 \\ \dfrac{2س+1}{س+2} & ، \ 2 \le س < 3 \\ 2 & ، \ س = 3 \end{cases}$$

القواعد:

- $\overline{\text{ا}س}$ $\leftarrow$ $س = 0$ (+ + | − −)
- $\overline{\text{ا}س}$ متصل على $[0,1)$ لانه جذر زوجي فقرة
- $\overline{\text{ا}س+1}$ $\leftarrow$ $س = -1$ (+ + | − −)
- $\overline{\text{ا}س+1}$ متصل على $(1,3)$ لانه جذر زوجي فقرة.
- $\dfrac{2س+1}{س+2}$ $\leftarrow$ $س+2 = 0$ $\Rightarrow$ $س = -2 \notin (2,3)$
- $\dfrac{2س+1}{س+2}$ متصل على $(2,3)$ لانه اقتران نسبي فقرة.

المتشعب

عند $س = 1$

$\text{قا}(1) = \overline{\text{ا}2}$

$\text{نها}_{س \to 1^+} \overline{\text{ا}س+1} = \overline{\text{ا}2}$

$\text{نها}_{س \to 1^-} \overline{\text{ا}س} = 1$

قا$(س)$ غير متصل عند $س = 1$

عند $س = 2$

$\text{قا}(2) = \frac{5}{4}$

$\text{نها}_{س \to 2^+} \dfrac{2س+1}{س+2} = \frac{5}{4}$

$\text{نها}_{س \to 2^-} \overline{\text{ا}س+1} = \overline{\text{ا}3}$

قا$(س)$ غير متصل عند $س = 2$

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاطراف

عند $س = ٠$

$ق(٠) = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} \sqrt{س} = ٠$

$ق(س)$ متصل على يمين $س = ٠$

عند $س = ٣$

$ق(٣) = ٢$

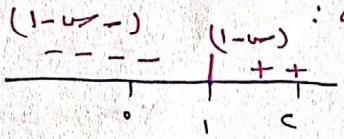
$\lim_{س \to ٣^-} \frac{٢س + ١}{٢ + س} = \frac{٧}{٥}$

$ق(س)$ غير متصل على يسار $س = ٧$

$\therefore ق(س)$ متصل على $[٠، ٣[\cup]٣، ٢[$.

مثال (٦) : ابحث في اتصال $ق(س) = \sqrt{|س - ١| + س}$ على $[٠، ٢]$.

الحل : نفيد تعريف المقيمة المطلقة :



$|س - ١| = ٠$

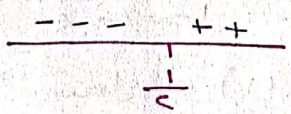
$س = ١$

$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ \sqrt{٢س - ١} & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

القواعد : (١) متصل على $(٠، ١)$ لانه كثير حدود

$\sqrt{٢س - ١} \leftarrow س = \frac{١}{٢}$



$\Leftarrow \sqrt{٢س - ١}$ متصل على $(٢، ١)$ لانه جذر زوجي معرف .

التشعب : عند $س = ١$

$ق(١) = ١$

$\lim_{س \to ١^+} \sqrt{٢س + ١}$

$\lim_{س \to ١^-} ١ = ١$

$\Leftarrow ق(س)$ متصل على $س = ١$

الاطراف : عند $س = ٠$

$ق(٠) = ١$

$\lim_{س \to ٠^+} ١ = ١$

$ق(س)$ متصل على يمين $س = ٠$

عند $س = ٢$

$ق(٢) = \sqrt{٣}$

$\lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٢س - ١} = \sqrt{٣}$

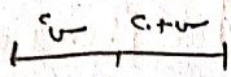
$ق(س)$ متصل على يسار $س = ٢$

$\Leftarrow ق$ متصل على $[٢، ٠]$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٧) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، ٣ \leq س < ٥ \\ س + ٢٠ & ، ٥ \leq س < ٧ \\ ٩ & ، س = ٧ \end{cases}$ ابحث في اتصال ق على الفترة $[٣، ٧]$.

الحل :-



$[٣، ٥)$ متصل لانه على صورة كثير حدود.

$[٥، ٧)$ متصل لانه على صورة كثير حدود.

نبحث اتصال ٧ من اليسار

$ق(٧) = ٩$

$\lim_{س \to ٧^-} ق(س) = ٧ + ٢٠ = ٢٧$ ⇐ ق غير متصل من يسار ٧

نبحث اتصال ٥

$ق(٥) = ٥ + ٢٠ = ٢٥$

$\lim_{س \to ٥^-} س + ٢٠ = ٢٥$

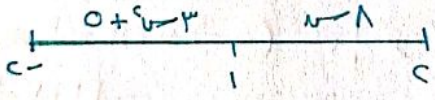
$\lim_{س \to ٥^+} س^2 = ٢٥$ ⇐ $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ق(٥)$ ⇐ ق(س) متصل عندما س = ٥

⇐ ق متصل على $[٣، ٧)$.

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

مثال (٨) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^2 + ٥ & ، -٢ \leq س < ١ \\ ٨س & ، ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$ ابحث في اتصال ق على $[-٢، ٢]$

الحل



$[-٢، ١)$ ق متصل لانه على صورة كثير حدود.

$(١، ٢]$ ق متصل لانه كثير حدود

نبحث اتصال س = ١

$ق(١) = ٨ \times ١ = ٨$

$\lim_{س \to ١^+} ٨س = ٨$ / $\lim_{س \to ١^-} ٣س^2 + ٥ = ٣ + ٥ = ٨$

$\lim_{س \to ١} ق(س) = ق(١)$ متصل عندما س = ١

⇐ ق متصل على $[-٢، ٢]$ #.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أسئلة وزارة على الاتصال:

٢٠٠٨/صيفي إذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س] + س^2 & ، -1 \le س < 0 \\ \sqrt{س} + \frac{3}{5} س^2 & ، 0 \le س \le 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق على $[-1، 2]$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الحل:- $ق(س) = \begin{cases} -1 + س & ، -1 \le س < 0 \\ \sqrt{س} + \frac{3}{5} س^2 & ، 0 \le س \le 2 \end{cases}$

$[-1، 0)$ ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

$(0، 2]$ ق متصل لأنه مجموعة اقترانات متصلة على الفترة ، نبحث اتصال $س = 0$

$ق(0) = \sqrt{0} + \frac{3}{5}(0)^2 = صفر$

$\lim_{س \to 0^+}$ ق(س) = صفر / $\lim_{س \to 0^-}$ ق(س) = $-1 + 0 = -1$ ← $\lim_{س \to 0}$ ق(س) غير موجودة

ق غير متصل عند $س = صفر$ ← ق متصل على $[-1، 2] - \{صفر\}$

٢٠٠٩/شتوي إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} س^2 + \sqrt{-س} & ، -1 \le س < 0 \\ [س] + 5س - 2 & ، 0 \le س \le 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة $[-1، 1]$.

الحل: $ق(س) = \begin{cases} س^2 + \sqrt{-س} & ، -1 \le س < 0 \\ 5س - 2 & ، 0 \le س < 1 \\ 4 & ، س = 1 \end{cases}$

$[-1، 0)$ ق متصل لأنه مجموعة اقترانات متصلة على الفترة

$(1، 2)$ ق متصل لأنه على صورة كثير حدود

$س = 1$ من اليسار

$ق(1) = 4$

$\lim_{س \to 1^-}$ ق(س) = $5 - 2 = 3$ ← ق غير متصل من اليسار.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$س = ٠$

$ق(٠) = ٥ \times ٠ - ٢ = ٠ - ٢ = -٢$

$\therefore$ نهـا $ق(س) = -٢$
$س \to ٠^+$

نهـا $ق(س) = (٠)^٢ + ٠ = ٠$
$س \to ٠^-$

$\therefore$ نهـا $ق(س)$ غير موجودة
$س \to ٠$

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند $س = ٠$

$\Leftarrow$ ق متصل على $[-١، ١) - [٠]$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

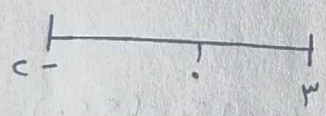
٢٠٠٩/ صيفي

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٦ & س \le -٢ \\ \frac{٤}{س+١} & -٢ < س \le ٠ \\ ٣س + ١ & ٠ < س < ٣ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$

ادرس فيما إذا كانت ق متصلة على $[-٢، ٣]$.

الحل:

$ق(س) = \begin{cases} ٦ & س \le -٢ \\ \frac{٤}{س+١} & -٢ < س \le ٠ \\ ٣س - س & ٠ < س < ٣ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$



$[-٢، ٠)$ ق متصل لأن مجموعة اقترانات متصلة على الفترة.

$(٠، ٣)$ ق متصل لأن كثير حدود معرفة على الفترة.

نبحث اتصال ٣ في السيار $\Leftarrow$ $ق(٣) = ٦$ ، نهـا $ق(س) = \frac{٤}{١+٣} = \frac{٤}{٤} = ١$
$س \to ٣^-$

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند ٣ في السيار.

نبحث اتصال $س = ٠$.

$ق(٠) = \frac{٤}{١+٠} = \frac{٤}{١} = ٤$ / نهـا $ق(س) = ٤$ / نهـا $ق(س) = ٣ \times ٠ - ٠ = ٠ =$ صفر
$س \to ٠^+$ $س \to ٠^-$

$\therefore$ نهـا $ق(س)$ غير موجودة
$س \to ٠$

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند $س = ٠$

$\Leftarrow$ ق متصل على $[-٢، ٣) - [١]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٠١٠/ مستوى اذا كان قة (س) = $\begin{cases} \frac{P}{س} + س^2 & ، \ 0 < س < 2 \\ [س] + 3 & ، \ 2 < س < 3 \\ 7 & ، \ س = 3 \end{cases}$

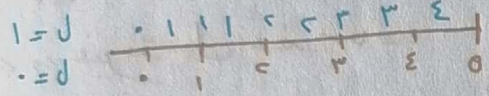
وكان قة متصل عند س = ٢

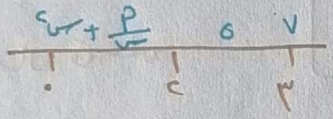
فاجب عما يأتي :-

١) جد قيمة ثابت P ٢) ابحث في اتصال الفترة [٠، ٣]

الحل :

قة (س) = $\begin{cases} \frac{P}{س} + س^2 & ، \ 0 < س < 2 \\ (2+3) & ، \ 2 < س < 3 \\ 7 & ، \ س = 3 \end{cases}$





① قة متصل عند س = ٢

قة (٢) = نظ قة (س)
س ← ٢+

$\therefore \frac{P}{2} + 4 = 5 \Leftarrow \frac{P}{2} = 1 \Leftarrow$ **P = ٢**

② (٠، ٢) قة (س) متصل لانه مجموعة اقترانات متصلة على الفترة.

(٢، ٣) قة (س) متصل لانه كثير حدود.

نبحث اتصال س = ٣ من اليسار

نظ قة (س) = ٥
س ← ٣-
قة (٣) = ٧

← قة غير متصل من يسار ٣ / قة متصل عند س = ٢ من المعطيات

∴ قة متصل على (٠، ٣)

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

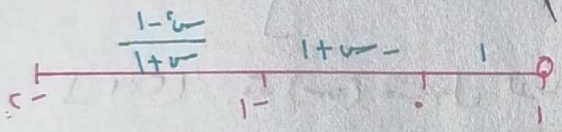
٢٠١٠ / صيفي

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{1+س} & ، -2 \le س < -1 \\ س - [س] + 1 & ، -1 \le س < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال ق على $[-2, 1)$

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{1+س} & ، -2 \le س < -1 \\ -س+1 & ، -1 \le س < 0 \\ 1 & ، 0 \le س < 1 \end{cases}$$



$[-2, -1)$ ق متصل لانه معرف على فترة.

$(-1, 0)$ ق متصل لانه صورة كثير حدود.

$(0, 1)$ ق متصل لانه على صورة كثير حدود.

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

نبحث اتصال $س = -1$

$ق(-1) = -(-1) + 1 = 2$

$\lim_{س \to -1^+} ق(س) = 2$

$\lim_{س \to -1^-} ق(س) = \lim_{س \to -1} \frac{(س-1)(س+1)}{(س+1)} = -1-1 = -2$

$\Leftarrow \lim_{س \to -1}$ ق(س) غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند $س = -1$

نبحث اتصال $س = 0$

$ق(0) = 1$

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = 1$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = 1$ $\Rightarrow \lim_{س \to 0} ق(س) = 1$

$\lim_{س \to 0} ق(س) = ق(0)$

$\Leftarrow$ ق متصل عند $س = 0$

ق متصل على $[-2, 1) - \{-1\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٠١٩/ شتوي/ جديد

ق(س) = $\sqrt{[س+1]+3س^2}$ ، س ∈ [١، ٣] ابحث في اتصال الاقتران على مجاله.

الحل: ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{2+3س^2} & ، 1 \le س < 2 \\ \sqrt{3+3س^2} & ، 2 \le س < 3 \\ \sqrt{4+3س^2} & ، س = 3 \end{cases}$

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

١) ق(س) متصل لانه معرف على مجاله. [١، ٢)

٢) ق(س) متصل لانه معرف على مجاله. (٢، ٣)

⇐ س = ٢

ق(٢) = $\sqrt{15}$

$\lim_{س \to 2^+}$ = $\sqrt{3+3س^2}$ = $\sqrt{15}$ / $\lim_{س \to 2^-}$ = $\sqrt{2+2س^2}$ = $\sqrt{14}$

⇐ $\lim_{س \to 2}$ غير موجودة ⇐ ق(س) غير متصل عند س = ٢

⇐ س = ٣ (من اليسار)

ق(٣) = $\sqrt{4+7^2}$ = $\sqrt{31}$

$\lim_{س \to 3^-}$ ق(س) = $\sqrt{3+(9\times3)}$ = $\sqrt{30}$ ⇐ $\lim_{س \to 3^-}$ ق(س) ≠ ق(٣)

⇐ ق(س) غير متصل عند س = ٣

⇐ ق متصل على [١، ٣) - {٢}.

٢٠١٩/ صيفي/ طلاب سوا: اذا كانت ق(س) = $\sqrt{-س}$ ، فان الاقتران ق

متصل على الفترة:

أ) $(-\infty, 0]$ ب) $(0, \infty)$ ج) $[0, \infty)$

د) $(-\infty, 0)$

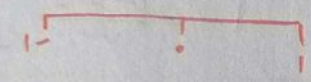
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٠١٩/ صيفي / طلاب ٢٠١٠

اذا كان قا(س) = [س+٢] ، هـ(س) = $\frac{(س-١)^{٢}}{س+٣}$ فادرسي في اتصال

الاقتران (قا×هـ)(س) على الفترة [-١،١]

الحل: قا(س) = $\begin{cases} \frac{(س-١)^{٢}}{س+٣} \times ١ & ، -١ \leq س < ٠ \\ \frac{(س-١)^{٢}}{س+٣} \times ٢ & ، ٠ \leq س < ١ \\ \frac{(س-١)^{٢}}{س+٣} \times ٣ & ، س = ١ \end{cases}$



[-١،٠) قا(س) متصل لانه حاصل ضرب وقسمه اقترانات متصلة ومعرف على مجالة.

(٠،١) قا(س) متصل لانه حاصل ضرب وقسمه اقترانات متصلة.

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

عند س = ٠

قا(٠) = $\frac{١ \times ٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ قا(س) = $\frac{٢}{٣}$

$\lim_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{١ \times (س-١)^{٢}}{س+٣} = \frac{١}{٣}$

$\lim_{س \to ٠}$ قا(س) غير موجودة ⇐ قا غير متصل عند س = ٠

س = ١ من اليسار.

قا(١) = $\lim_{س \to ١^{-}}$ قا(س)

قا(س) متصل من اليسار ١

قا(س) متصل على [-١،١] - {٠}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

سؤال ٥ من صفحة ٥٨ من الكتاب

اذا كان ق(س) = { |ظاس| / س ، س < ٠ ؛ ١ - جتاس ، س ≥ ٠

البحث في اتصال الاقتران
ق(س) عند س = ٠

الحل :

① ق(٠) = ١ - جتا٠ = ١ - ١ = ٠

② $\lim_{س \to 0^+}$ ١ - جتاس = ١ - ١ = صفر

	ظاس	- ظاس
|ظاس|		

$\lim_{س \to 0^-}$ - ظاس / س = - ١

∴ $\lim_{س \to 0}$ ق(س) غ.م ⇐ ق(س) غير متصل عند س = ٠

مثال : ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٢ ، س = ٢٫٥

ق(س) = { ٣ ، س ∈ ص ؛ ٥ ، س ∉ ص

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الحل :

عندما س = ٢

① ق(٢) = ٣

② $\lim_{س \to 2}$ ق(س) = ٥

③ $\lim_{س \to 2}$ ق(س) ≠ ق(٢) ⇐ ق(س) غير متصل عند س = ٢

عندما س = ٢٫٥

① ق(٢٫٥) = ٥

② $\lim_{س \to 2.5}$ ق(س) = ٥

③ $\lim_{س \to 2.5}$ ق(س) = ق(٢٫٥) ⇐ ق(س) متصل عند س = ٢٫٥

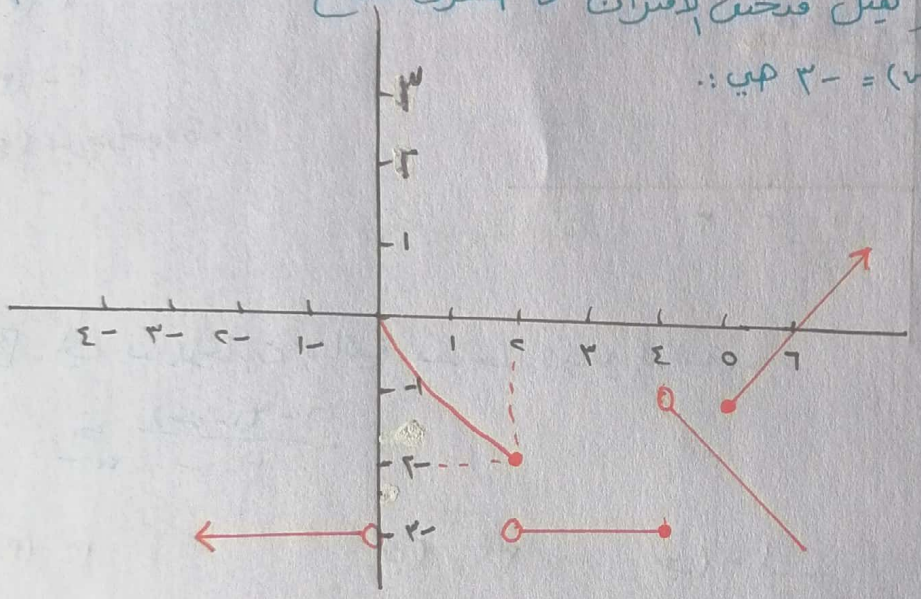
"تم بحمد الله".

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اختبار للوحدة الاولى :-

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة :-

[1] اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، فأوجد مجموعة قيم p بحيث تكون خ ق(س) = -٣ هي :



p ∈ {-٣}

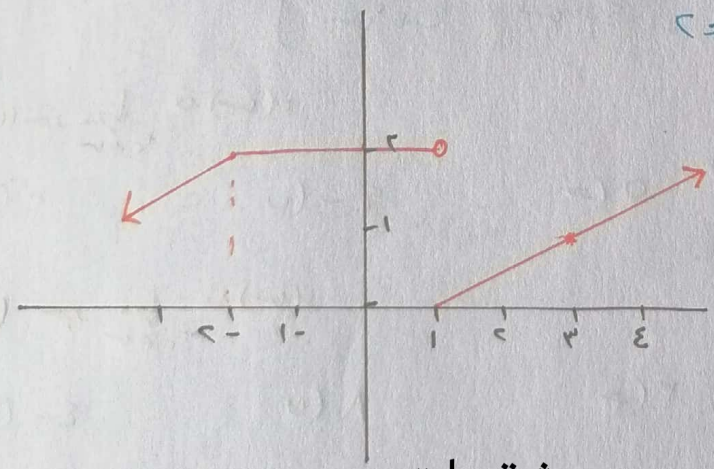
أ) {١}

ب) {٣}

ج) غير موجودة

د) {٠، ٢، ٣}

[2] اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، فأوجد مجموعة قيم س التي تجعل خ ق(س) = ٢



أ)]-∞، ١[∪ {٤}

ب)]-∞، ١[∪ {٣}

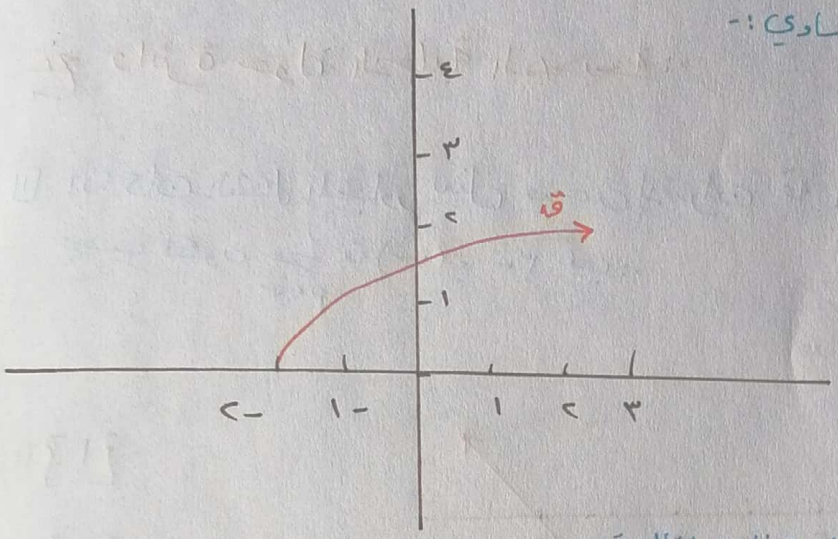
ج)]-١، ٢[

د) {١}

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة $[-٢، ٥)$ فإن $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) تساوي :-



أ) صفر
ب) ١
ج) -٢
د) غير موجودة .

٤) اي من الاجابات التالية يعد حل للنهاية التالية :-

$$\lim_{س \to ٢^+} \frac{(س-١)^٤ - ١٦}{س - ٣} =$$

أ) ١٢ ب) -٣٢ ج) -١ د) ٣٢

٥) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & ، س \leq ٢ \\ س^٢ + ٤ & ، س > ٢ \end{cases}$

١) جد $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) :

أ) ٢ ب) -٤ ج) ٥ د) -٢

٢) جد $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) :

أ) -٤ ب) ٨ ج) ٣ د) -١

٦) جد $\lim_{س \to ٨^-}$ $\sqrt{س^٢ - ١٦٤}$

أ) ٢ ب) -٣ ج) صفر د) ١

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧) جد $\lim_{س \to ١,٥} [٤ - ٢س]$

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) غير موجودة .

٨) اذا كان هـ اقترانا كثير حدود وكانت $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{هـ(س)+٥}{س}\right) = \frac{١}{٤}$ وكانت $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ٣ب) = ٤$ اوجد قيمة الثابت ب ؟

أ) $\frac{١١}{٢}$ ب) $\frac{٢}{١٤}$ ج) غير موجودة د) $\frac{١٤}{٣}$

٩) اوجد النهاية التالية :

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - جا س}{١ - جتا ٢س}$

أ) $\frac{أ}{٢}$ ب) $-\frac{أ}{٢}$ ج) $\frac{أ}{٢}$ د) .

١٠) اذا كان ق(س) = س + ٢ ، هـ(س) = [٥ - س] فابحث في اتصال $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ عند النقطة س = ٦

أ) ٨ - ب) غير متصل ج) ٤ - د) ١

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اجابات الاختبار

١ ← ج) [٣[

٢ ← ب)]-∞،١[∪ [٤[

٣ ← د غير موجودة

٤ ← د ٣٢

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{((س-١)^{٢}-٤)(س-١)^{٢}+٤)}{س-٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{((س-١)-٢)(س-١+٢)(س-١)^{٢}+٤)}{س-٣} = ٤ \times ٨ = ٣٢$$

٥ ← أ ← ج) ٥

نهـا$_{س\to -٢^{+}}$ ق(س) = ٢ × ٢ + ١ = ٤ + ١ = ٥

ب ← ب) ٨

نهـا$_{س\to -٢^{-}}$ ق(س) = $(٢)^{٢}$ + ٤ = ٤ + ٤ = ٨

٦ ← ج) صفر

$س^{٢} - ٦٤ = ٠$

$س^{٢} = ٦٤$

$س = \pm ٨$

	-٨		٨	
$س^{٢}-٦٤$	+	−	−	+
$س-٨$	−	−	+	+
$(س+٨)(س-٨)$	+	−	+	+

نهـا$_{س\to ٨^{+}}$ $س^{٣}-٦٤ = ٦٤-٦٤ =$ صفر

نهـا$_{س\to ٨^{-}}$ $-(س^{٣}-٦٤) = -(٦٤-٦٤) =$ صفر

نهـا$_{س\to ٨}$ ق(س) = نهـا$_{س\to ٨^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س\to ٨^{-}}$ ق(س) .

صهيب شقيرات 0788879679

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

صهيب شقيرات 0788879796679

٧) د ← غير موجودة

[٤ - ٢(١,٥)] = ١ نخير التعريف

[٤-٢س] = { ١ ، ١ < س < ١,٥ ، ٠ ، ١,٥ < س ≤ ٢

نها [٤-٢س] = ١
س ← ١,٥+

نها [٤-٢س] = صفر
س ← ١,٥-

← [نها ة(س) = نها ة(س) ≠ نها ة(س) ∴ غ.م.
س ← ١,٥+ س ← ١,٥ س ← ١,٥-

٨) د ← ١٤/٣

بما ان هـ(س) كثير حدود

∴ هـ(س) موجبة عند س = ٠

نها (هـ(س)+٥) / س = ١/٤
س ← ٠

نها هـ(س) + نها ٥ / نها س = ١/٤
س ← ٠ س ← ٠ س ← ٠

⇐ نها هـ(س) = ١/٤ نها س - ٥
س ← ٠ س ← ٠

وبالتعويض نها هـ(س) خارج :
س ← ٠

نها هـ(س) - ٥ = ٣ب + ٥ = ٤
س ← ٠

⇐ ١/٤ نها س - ٥ = ٣ب + ٥ - ٥ = ٤
س ← ٠

= - ١٠ + ٣ب = ٤

٣ب = ١٤

ب = ١٤/٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٩) جـ ← $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا٢س = ١ - ٢جا٢س

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٢س - جاس}{١ - ١ + ٢جا٢س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٢س - جاس}{٢جا٢س}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٢س}{٢جا٢س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{جاس}{جا٢س} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$

$= \frac{٢}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٤}$

١٠) هـ(س) = $\begin{cases} ٠ & ، ٤ < س \leq ٥ \\ -١ & ، ٥ < س \leq ٦ \\ -٢ & ، ٦ \leq س < ٧ \end{cases}$

ب) غير متصل.

صهيب شقيرات
0788879679 قصبة اربد

غير معرفة عند س = ٤

$\frac{ق(س)}{هـ(س)} = \begin{cases} \frac{س+٢}{٠} & ، ٤ < س \leq ٥ \\ \frac{س+٢}{-١} & ، ٥ < س \leq ٦ \\ \frac{س+٢}{-٢} & ، ٦ \leq س < ٧ \end{cases}$

١) على الفترة (٤، ٥)

$\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ غير معرف

← غير متصل

٢) على الفترات (٥، ٦] ، [٦، ٧)

متصل لأنه كثير حدود

٣) عند س = ٦

$\text{نها}_{س \to ٦^+} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{١}{-٢}(٦) - ١ = -٤$

$\text{نها}_{س \to ٦^-} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = -٦ - ٢ = -٨$

∴ $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ غير متصل عند س = ٦

$\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متصل على الفترة (٥، ٦) ∪ (٦، ٧)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner