صهيب شقيرات ماستر رياضيات 0788879679

الفصل الثاني :- مقدمة في النهايات والاتصال.

صفحة

تدريس لكافة
مناطق اربد وقرى
اربد

الفصل الثالث.

للثاني ثانوي
العلمي.

الدرس الأول :- مفهوم النهايات .

- رمز النهاية $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) .

← وتقرأ نهاية ق(س) عندما س تقترب من أ

او عندما س تؤول الى أ

- يتم ايجاد النهاية بثلاث طرق :-

١- طريقة التعويض المباشر وهي الاصل في النهاية .

٢- طريقة تكوين الجدول .

٣- طريقة الرسم البياني .

ملاحظة اذا لم يطلب في السؤال طريقة الحل نقوم بالحل على طريقة التعويض المباشر

مثال (١) اوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) باستخدام الطرق الثلاث السابقة :-

اذا كان ق(س) = س + ١

الحل : ١- $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٢ + ١ = ٣ → التعويض المباشر

٢- تكوين الجدول

ق(س) = س + ١

نضع قيمتين اعلى من نقطة الاقتراب $\leftarrow$ س > ٢+

س < ٢- $\rightarrow$ نضع قيمتين اقل من نقطة الاقتراب

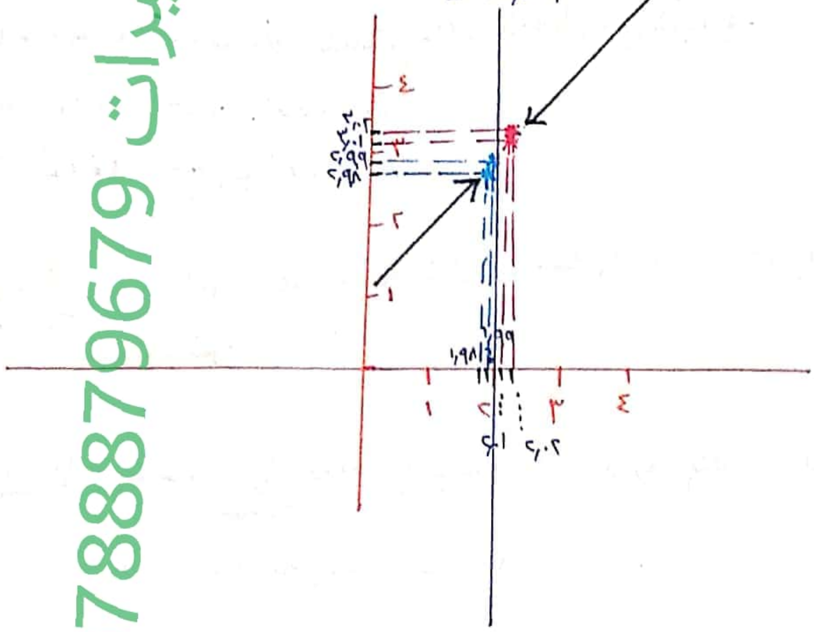
س	٢,٠٢	٢,٠١	٢	١,٩٩	١,٩٨
ص	٣,٠٢	٣,٠١	٣	٢,٩٩	٢,٩٨

- $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$
- $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

$\leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

٣- الرسم البياني :-

- يعتمد على تكوين الجدول.
- التحديد على محور السينات والاجابه عند الصادات.



$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

نستنتج مما سبق انه :- ١- اذا كان $\underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س)$ فإن :

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}\ \text{ق}(س)$ موجودة وتساوي نفس القيمة.

٢- أما اذا كانت $\underset{س \leftarrow أ^{+}}{نها}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س \leftarrow أ^{-}}{نها}$ ق(س) فإن

$\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) غير موجودة.

← وهذا ما يسمى مفهوم النهاية.

ملاحظة: عند ايجاد النهاية لنقطة التشعب يجب بحث نهايتها من اليمين واليسار فإذا كان النهايتين متساويتين فإن النهاية موجودة وتساوي نفس القيمة أما اذا كانتا النهايتين غير متساويتين فإن النهاية غير موجودة.

مثال (١) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س & ، س \geq ١ \\ س & ، س < ١ \end{cases}$ ، اوجد $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س) باستخدام الطرق الثلاثة السابقة.

الحل :- $\boxed{١}$ التعويض المباشر

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ ٢س = ٢

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها}$ س = ١

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س) غير موجودة.

$\boxed{٢}$ تكوين الجدول.

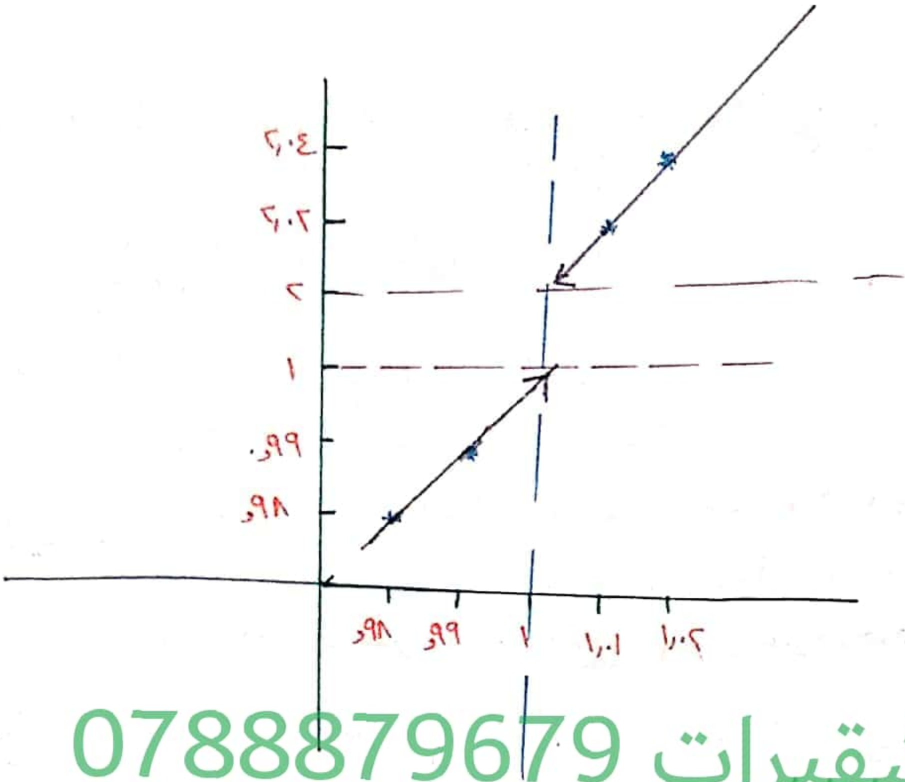
س	١,٠٢	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩٨
ق(س)=ص	٢,٠٤	٢,٠٢		٠,٩٩	٠,٩٨
	٢	٢		١	١

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ ق(س) = ٢

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نها}$ ق(س) = ١

← $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س) غير موجودة.

٣ الرسم البياني .



$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١

⇓

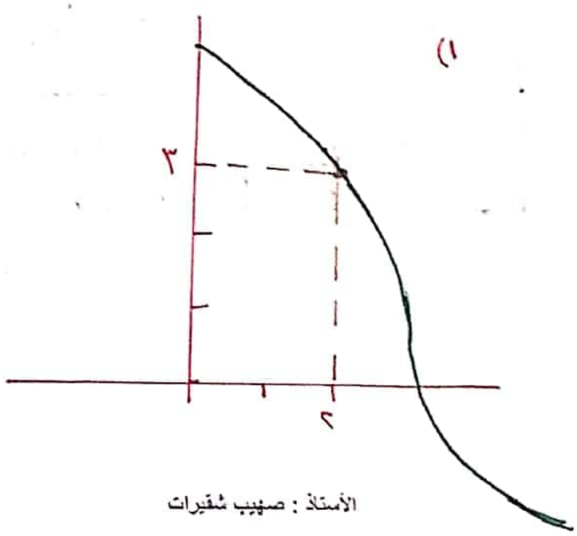
$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة .

تدريب :- اذا كان ق(س) = ٢س + ١ ، اوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) باستخدام الطرق الثلاث .

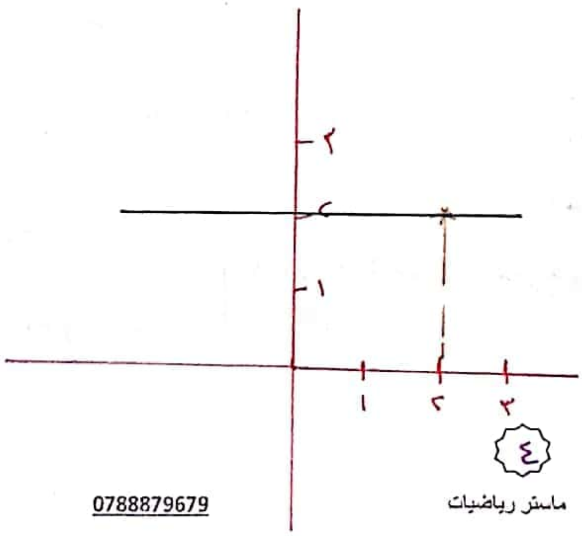
مثال (٢) جد ما يلي باستخدام الرسم التالي :-

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)   ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)   ٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س)

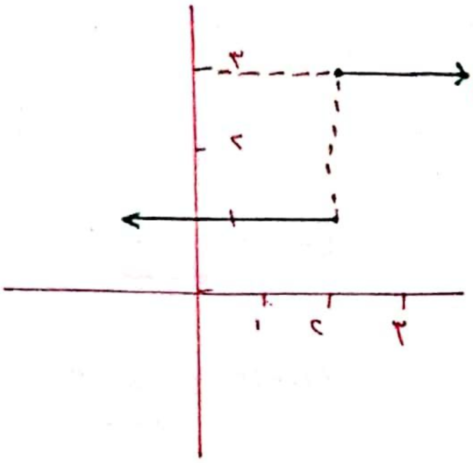
١)



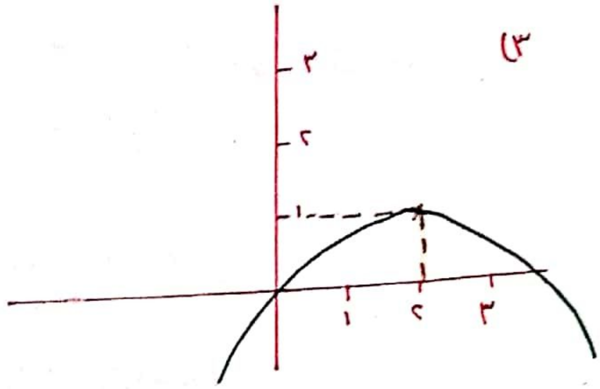
٢)



٤)



٣)



الحل

١- $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

$\leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

٢- $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٥$

٣- $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ١$

٤- $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ٣$

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = ١$

$\leftarrow \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س)$ غير موجودة.

مثال (٣) اذا كان $\text{ق}(س) = س^{٢} + ١$ ، اوجد $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}}\ \text{ق}(س)$.

الحل :

$\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نها}}\ س^{٢} + ١ = ٥^{٢} + ١$

$= ٢٥ + ١$

$= ٢٦$.

مثال (٤)

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ &، س \geq ٢ \\ ٥س &، س < ٢ \end{cases}$ نقطه تشعب

جد : ١- $\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س)

٢- $\lim\limits_{س \to ١-}$ ق(س)

٣- $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س)

٤- $\lim\limits_{س \to ٢-}$ ق(س)

الحل :-

١- $\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٣}$ ٢س + ١

= ٢ × ٣ + ١

= ٦ + ١

= ٧ .

٢- $\lim\limits_{س \to ١-}$ = $\lim\limits_{س \to ١-}$ ٥س .

= ٥ × -١

= -٥

٣- $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) = نقطه التشعب

$\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ٢س + ١ = ٢×٢ + ١ = ٤ + ١ = ٥

$\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ٥س = ٢ × ٥ = ١٠

$\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) $\neq$ $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س)

∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

٤- $\lim\limits_{س \to ٢-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢-}$ ٥س

= ٥ × -٢

= -١٠

مثال (٥)

اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ & ، \ س \geq ١ \\ ٥س - ٢ & ، \ س < ١ \end{cases}$

اوجد : ١- $\underset{س \leftarrow ١^+}{نها}$ ق(س)   ٢- $\underset{س \leftarrow ١^-}{نها}$ ق(س)   ٣- $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س)

الحل :

(١) $\underset{س \leftarrow ١^+}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^+}{نها}$ س^٢ + ٢

= (١)^٢ + ٢

= ٣

(٢) $\underset{س \leftarrow ١^-}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^-}{نها}$ ٥س − ٢

= ٥ × ١ − ٢

= ٥ − ٢

= ٣

(٣) $\underset{س \leftarrow ١^+}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^-}{نها}$ ق(س) = ٣

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س) = ٣

مثال (٦)

اذا كانت ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، \ ١ \leq س < ٥ \\ ٢س & ، \ ٥ \leq س \leq ٧ \end{cases}$

٥ ← نقطة التشعب

٧ ← نهاية الفترة.

اوجد.

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ ق(س)   ٢) $\underset{س \leftarrow ٦}{نها}$ ق(س)   ٣) $\underset{س \leftarrow -٣}{نها}$ ق(س)   ٤) $\underset{س \leftarrow ٩}{نها}$ ق(س)

٥) $\underset{س \leftarrow ٥}{نها}$ ق(س)   ٦) $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س)   ٧) $\underset{س \leftarrow ٧}{نها}$ ق(س)   ٨) ق(١)

٩) ق(٧)   ١٠) ق(٥)   ١١) ق(١٢)

الحل :-

١) نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ س^٢ = (٢)^٢
= ٤

٢) نهـا$_{س \leftarrow ٦}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow ٦}$ ٢س
= ٢ × ٦
= ١٢

٣) نهـا$_{س \leftarrow -٣}$ ق(س) ← غير موجودة لأن -٣ ∉ للمجال.

٤) نهـا$_{س \leftarrow ٩}$ ق(س) ← غير موجودة لأن ٩ ∉ للمجال.

٥) نهـا$_{س \leftarrow ٥}$ ق(س)
نهـا$_{س \leftarrow ٥^+}$ ٢س = ٢ × ٥ = ١٠
نهـا$_{س \leftarrow ٥^-}$ س^٢ = ٥^٢ = ٢٥
∴ غير موجودة.

٦) نهـا$_{س \leftarrow ١}$ ق(س) ← غير موجودة لأن (١) بداية فترة.

٧) نهـا$_{س \leftarrow ٧}$ ق(س) ← غير موجودة لأن (٧) نهاية فترة.

٨) ق(١) = س^٢ = ١^٢ = ١

٩) ق(٧) = ٢س = ٢ × ٧ = ١٤

١٠) ق(٥) = ٢س = ٢ × ٥ = ١٠

١١) ق(١٢) ← غير معروفه لان ١٢ ∉ للمجال.

ملاحظه ١ عند بداية الفترة ونهاية الفترة النهايه عندها غير موجودة.
٢ عند نقاط التشعب يجب بحث النهاية من اليمين واليسار.

مثال (٨) اذا علمت ان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢ & \text{، س} \neq ٢ \\ ٥\text{س} - ٢ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$$

نقطة التشعب

اوجد : ١) $\lim_{\text{س} \to ٣}$ ق(س)   ٢) $\lim_{\text{س} \to ١}$ ق(س)   ٣) ق(٢)   ٤) ق(١)

ملاحظه - في حالة = و ≠ النهاية نعوض عند ≠

- نعوض عند (=) فقط صورة نقطة التشعب.

الحل : ١) $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق(٢) = $\lim_{\text{س} \to ٢}$ (س^٢ + ٢)

= (٢)^٢ + ٢

= ٤ + ٢ = ٦

٢) $\lim_{\text{س} \to ١}$ ق(١) = $\lim_{\text{س} \to ١}$ (س^٢ + ٢)

= (١)^٢ + ٢ = ٣

٣) ق(٢) = ٥ س − ٢

= ٥ × ٢ − ٢

= ١٠ − ٢ = ٨

٤) ق(١) = س^٢ + ٢

= (١)^٢ + ٢

= ٣.

مثال (٩) اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٣ & \text{، س} \neq ٣ \\ ٥ & \text{، س} = ٣ \end{cases}$$

جـ : ١) $\lim_{\text{س} \to ٣}$ ق(س)

٢) ق(س)

الحل :- ① $\lim_{\text{س} \to ٣}$ ق(س) = $\lim_{\text{س} \to ٣}$ س^٣ = (٣)^٣ = ٢٧

② ق(٣) = ٥

مثال (١٠)

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٨س & ، س \neq ٥ \\ ٥س & ، س = ٥ \end{cases}$

جد : ١) نها ق(س)
س←٥

٢) نها ق(س)
س←٢

٣) ق(٥)

الحل :-

١) نها ٨س = ٨×٥
س←٥
= ٤٠

٢) نها ٨س = ٨×٢
س←٢
= ١٦

٣) ق(٥) = ٥س = ٥×٥
= ٢٥

ايجاد المجاهيل من خلال النهايات :-

مثال (١١) اذا كانت ق(س) = ٣س + P ، وكانت نها ق(س) = ١٥
س←٢
اوجد P.

الحل: نها ق(س) = ١٥ ⇐ نها ٣س + P = ١٥
س←٢ س←٢

⇐ ٣×٢ + P = ١٥

$\cancel{٦}$ + P = ١٥ − ٦
−٦

$\boxed{P = ٩}$.

مثال (١٢) ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + \text{م} & ،\ \text{س} > ٢ \\ ٥\text{س} - ١ & ،\ \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

إذا علمت أن $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س})$ موجودة ، أوجد م.

الحل: بما أن $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س})$ موجودة.

$\Leftarrow$ ∴ $\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س})$

$$\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نها}}\ ٢\text{س} + \text{م} = ٢ \times ٢ + \text{م}$$

$$= \boxed{٤ + \text{م}}$$

$\Leftarrow$ $\underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نها}}\ ٥\text{س} - ١$

$$= ٥ \times ٢ - ١$$

$$= ١٠ - ١ = \boxed{٩}$$

$$\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س})$$

$$٤ + \text{م} = ٩$$

$$\text{م} = ٩ - ٤$$

$$\boxed{\text{م} = ٥}\ \#$$

مثال (١٣) ليكن $ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ + ٥ & ، س \neq ٢ \\ ٢ + أ & ، س = ٢ \end{cases}$

اذا علمت ان $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$ اوجد أ.

الحل :-

$ق(٢) = ٢ + أ$.

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} س^٢ + ٥$

$= (٢)^٢ + ٥$

$= ٤ + ٥$

$= ٩$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$

$٩ = ٢ + أ$

$\boxed{أ = ٧}$ #

مثال (١٤) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ + ٥ & ، ١ \leq س < ٥ \\ أس + ٨ & ، ٥ \leq س < ٩ \end{cases}$

اذا علمت ان $\lim_{س \to ٥} ق(س)$ موجودة اوجد قيمة أ.

الحل :- بما ان $\lim_{س \to ٥} ق(٥)$ موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥^-} ق(س) = \lim_{س \to ٥^+} ق(س)$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٥^+} أس + ٨ = ٥أ + ٨$

$\lim\limits_{س \to ٥^-} ٢س^٢ + ٥ = ٢ \times ٢٥ + ٥$

$= ٥٠ + ٥$

$= ٥٥$

$\lim\limits_{س \to ٥^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٥^+} ق(س)$

$٥أ + ٨ = ٥٥$

$٥أ = ٥٥ - ٨$

$\frac{٥أ}{٥} = \frac{٤٧}{٥}$

$\boxed{أ = \frac{٤٧}{٥}}$ #.

مثال (١٥)

ليكن $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ ، & س \neq أ \\ ٢٦ ، & س = أ \end{cases}$

إذا علمت أن $\lim\limits_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$ اوجد قيمة أ.

الحل:-

$\lim\limits_{س \to أ} ق(س) = \lim\limits_{س \to أ} س^٢ + ١$

$= أ^٢ + ١$

$ق(أ) = ٢٦$

$\lim\limits_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$

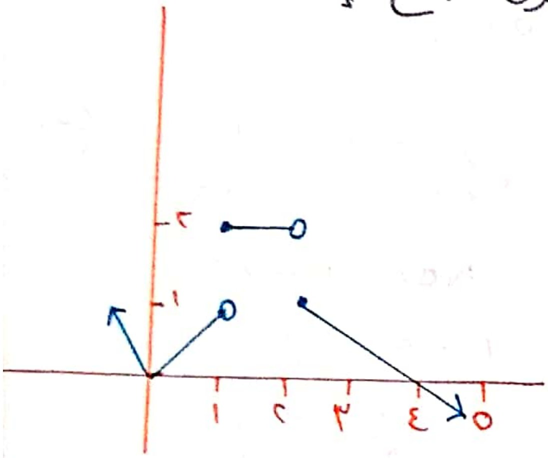
$أ^٢ + ١ = ٢٦$

$أ^٢ = ٢٥$

$\boxed{أ = \pm ٥}$ #.

٢٠٠٩ / شتوي - وزاري .

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة . هي :-



أ) {١، ٣، ٠}

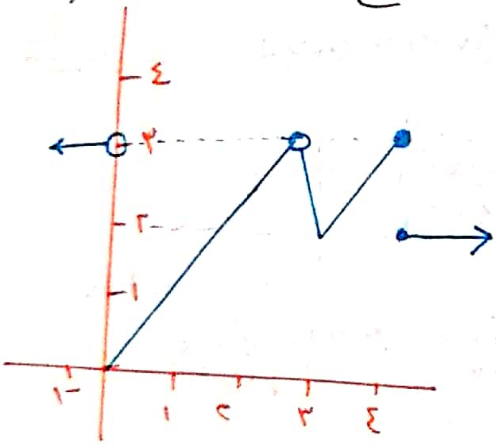
ب) {١، ٣، ٤}

ج) {١، ٣، ٤، ٠}

د) {١، ٣}

٢٠٠٩ / صيفي / وزاري

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ٣ هي :-



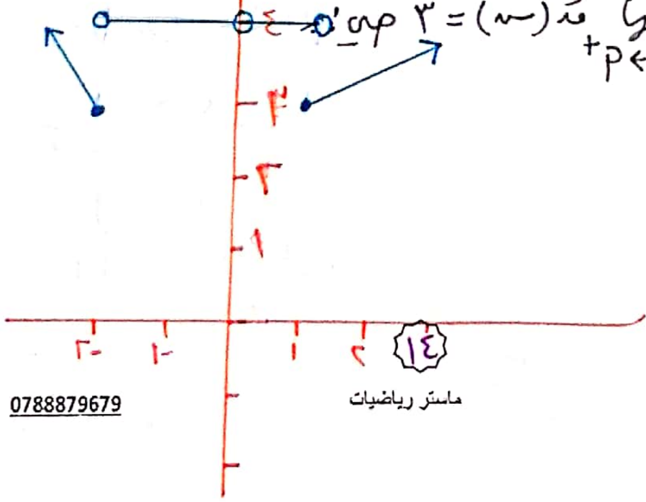
أ) $(-\infty, 0] \cup \{2\}$

ب) $(-\infty, 0) \cup \{2\}$

ج) $(-\infty, 0) \cup \{2, 4\}$

د) $(-\infty, 0] \cup \{2, 4\}$

٢٠١٠ / شتوي / وزاري . اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، فإن مجموعة قيم أ بحيث تكون $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س) = ٣ هي



أ) {١}

ب) {١، -٢}

ج) {٠، ١}

الدرس الثاني : نظريات النهايات .

١- نهاية الثابت عندما س تقترب من عدد $\left(\underset{س \to \text{عدد}}{\text{نها}}\ \text{ثابت}\right)$ = الثابت نفسه .

٢- اذا كان ق(س) كثير الحدود

$\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) = ق(أ)$ ⇐ التعويض المباشر

٣- اذا كان $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) = ب$

$\sqrt[ن]{\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)} = \sqrt[ن]{ب}$

٤- اذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ (جـ \times ق(س)) = جـ \left(\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)\right)$

$\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ (\text{ثابت} \times \text{اقتران}) = \text{ثابت} \times \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ (\text{اقتران})$.

٥- اذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) = ل$ ، $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) = م$ ، فإن :-

(أ) $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ \left(ق(س) \mp هـ(س)\right) = \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) \mp \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ هـ(س)$

$= ل \mp م$

(ب) $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ \left(ق(س) \times هـ(س)\right) = \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) \times \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ هـ(س)$

$= ل \times م$.

ج) $\lim\limits_{س \leftarrow م} \left(\frac{ق(س)}{هـ(س)} \right) = \frac{\lim\limits_{س \leftarrow م} ق(س)}{\lim\limits_{س \leftarrow م} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ ، حيث م ≠ صفر

ملاحظة النهاية توزع على جميع العمليات الحسابية شرط ان تكون النهاية موجودة.

مثال (١) جد كل من النهايات الاتية :-

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} ٦ = ٦$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ٣س^٢ - ٢س + ٦$

$= ٣ \times ٢^٢ - ٢ \times ٢ + ٦$

$= ١٢ - ٤ + ٦$

$= ١٤$

صهيب شقيرات 0788879679

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} (س^٢ + ٢)$

$= ٣^٢ + ٢$

$= ٩ + ٢ = ١١$

مثال (٢) اذا كانت ق(س) = ٢س^٢ - ٢س + ١ ، جد ما يلي :-

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$

الحل: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ٢س^٢ - ٢س + ١$

$= ٢ \times ٤ - ٢ \times ٢ + ١$

$= ٨ - ٤ + ١$

$= ٥$

٢) ق(٢)

$٢س^٢ - ٢س + ١$ ، س = ٢

$= ٢ \times ٤ - ٢ \times ٢ + ١$

$= ٨ - ٤ + ١$

$= ٥$

مثال (٣)

جد كل من النهايات التالية :-

١) $\lim_{\text{س} \to -1} 3 = 3$

٢) $\lim_{\text{س} \to 1^-} (2\text{م}+1) = 5$ اوجد قيمة م.

الحل: $2\text{م} + 1 = 5$

$2\text{م} = 4$

$\boxed{\text{م} = 2}$ لأن ٢م+١ ثابت فـ نهايتها نفسها.

#

٣) $\lim_{\text{س} \to \text{م}} \text{س}^2 - 5\text{س} + 2 = -2$ اوجد قيمة م

الحل: $= \text{م}^2 - 5\text{م} + 2 = -2$

$\text{م}^2 - 5\text{م} + 4 = 0$

$(\text{م} - 4)(\text{م} - 1) = 0$

$\text{م} = 4 \qquad \text{م} = 1$ #

٤) $\lim_{\text{س} \to -1} \dfrac{\text{س} - \text{س}^3}{\text{س}^3 - 2}$

$= \dfrac{-1 - (-1)^3}{(-1)^3 - 2} = \dfrac{-1 - (-1)}{-1 - 2} = \dfrac{\text{صفر}}{-3}$

$= \text{صفر}$

مثال (٤)

اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س) = −٣ ، $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ هـ(س) = ٢ ، جد كل مما يلي :-

١) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ (٢ هـ(س) − ق(س))

٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ (ق^٣(س) × هـ(س) − ٦)

٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ $\left(\dfrac{٣ - \text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}\right)$

الحل :-

$\boxed{١}$ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ (٢ هـ(س) − ق(س))

= ٢ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ هـ(س) − $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س)

= ٢×٢ − −٣ = ٤ + ٣

= ٧

$\boxed{٢}$ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق^٣(س) × $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ هـ(س) − $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ٦

= (−٣)^٣ × ٢ − ٦

= −٢٧ × ٢ − ٦

= −٥٤ − ٦

= −٦٠

$\boxed{٣}$ $\dfrac{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\ (٣) - \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{ق(س)}}{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{هـ(س)}}$ = $\dfrac{٣ - - ٣}{٢}$

= $\dfrac{٦}{٢}$

= ٣.

ملاحظة. توزع النهاية على الجمع والطرح والضرب والقسمة في حالة ان نهاية كل اقتران موجودة.

مثال (٥) اذا كانت نها ق(س) = ٤ ، نها هـ(س) = −٥ ، اجد مما يلي :-
(س ← ١)

١) نها ٣ ق(س)
(س ← ١)

٢) نها (٢ ق(س) − ٣ هـ(س))
(س ← ١)

٣) نها (س² × ق(س) − ٥س + ١)
(س ← ١)

٤) نها (١/٤ ق²(س) + ٣س)
(س ← ١)

٥) نها (ق(س) + ٥) / هـ²(س)
(س ← ١)

٦) نها (س² − ١) / ق(س) + √(٢هـ(س) + ١٤)
(س ← ١)

الحل:

١) نها ٣ ق(س)
= ٣ × ٤
= ١٢

٢) نها ٢ ق(س) − نها ٣ هـ(س)
= ٢ نها ق(س) − ٣ نها هـ(س)
= ٢ × ٤ − ٣ × −٥
= ٨ + ١٥ = ٢٣

٣) نها س² × نها ق(س) − نها ٥س + نها ١
= ١ × ٤ − ٥ + ١
= ٤ − ٥ + ١
= −١ + ١
= ٠

٤) ١/٤ نها ق²(س) + نها ٣س
= ١/٤ × (٤)² + ٣ × ١
= ١/٤ × ١٦ + ٣ = ٤ + ٣ = ٧

٥) (نها ق(س) + نها ٥) / نها هـ²(س)
= (٤ + ٥) / ٢٥
= ٩ / ٢٥

٦) نها (س² − ١) / نها ق(س) + √(نها ٢هـ(س) + ١٤)
= ((١)² − ١) / ٤ + √(٢ × −٥ + ١٤)
= ٠/٤ + √(−١٠ + ١٤)
= ٠ + √٤ = ٢.

مثال (٦)

اذا كانت نها$_{س \leftarrow ٢}$ (٢ قَ(س) − هـ(س)) = ٨ وكانت نها$_{س \leftarrow ٢}$ ((هـ(س)) − ٥س) = −٤

اوجد نها$_{س \leftarrow ٢}$ (قَ^{٣}(س) + ٢) .

الحل :- نجزئ المعطيات وذلك بجعل نها$_{س \leftarrow ١}$ هـ(س) ، نها$_{س \leftarrow ٢}$ قَ(س) لوحدها.

نها$_{س \leftarrow ٢}$ هـ(س) − نها$_{س \leftarrow ٢}$ ٥س = −٤

نها$_{س \leftarrow ٢}$ هـ(س) − ١٠ = −٤

نها$_{س \leftarrow ٢}$ هـ(س) = −٤ + ١٠

$\boxed{\text{نها}_{س \leftarrow ٢}\ \text{هـ(س)} = ٦}$

نها$_{س \leftarrow ٢}$ ٢ قَ(س) − نها$_{س \leftarrow ٢}$ هـ(س) = ٨

نها$_{س \leftarrow ٢}$ ٢ قَ(س) − ٦ = ٨

نها$_{س \leftarrow ٢}$ ٢ قَ(س) = ٨ + ٦

$\frac{٢}{٢}$ نها$_{س \leftarrow ٢}$ قَ(س) = $\frac{١٤}{٢}$

$\boxed{\text{نها}_{س \leftarrow ٢}\ \text{قَ(س)} = ٧}$

نها$_{س \leftarrow ٢}$ (قَ^{٣}(س) + ٢) =

(٧)^{٣} + ٢

= ٣٤٣ + ٢

= ٣٤٥ #

مثال (٧) اذا كان $\lim_{س \to أ} (س^{٣} - ٢س^{٢} + س + ١١)$ فما قيمة الثابت أ ؟

الحل:

$$أ^{٣} - ٢أ^{٢} + أ + ١١ = ١٣$$

$$أ^{٣} - ٢أ^{٢} + أ - ٢ = ٠$$

الاصفار النسبية ← جرب (٢)

$$٢^{٣} - ٢ \times ٢^{٢} + ٢ - ٢ = ٨ - ٨ + ٢ - ٢ = ٠$$

$\boxed{٢}$	١	٢-	١	٢-
	٠	٢	٠	٢
	١	٠	١	٠

$\Rightarrow$

$$(أ - ٢)(أ^{٢} + ١) = ٠$$

$$أ - ٢ = ٠ \Leftarrow أ = ٢$$

$$أ^{٢} + ١ \neq ٠$$

ملاحظة نهاية الاقتران الكسري لتعويض مباشر مالم يكون ناتج التعويض:

$\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ←

١. $\frac{عدد}{عدد}$ = عدد حقيقي ← موجودة.

٢. $\frac{صفر}{عدد}$ = صفر ← موجودة.

٣. $\frac{عدد}{صفر}$ ← غير موجودة.

٤- $\frac{صفر}{صفر}$ ← بحاجة الى حل.

مثال (٨) اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ٢ع(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٢} ٣ل(س) + ١ = ٧$ فجد كل مما يلي:-

أ) $\lim_{س \to ٢} (٢ع(س) + ل(س))$

ب) $\lim_{س \to ٢} (ع^{٢}(س) - ل(س))$

جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)}$

د) $\lim_{س \to ٢} (ع^{٢}(س) - ل^{٢}(س))$

الحل: نجهز المعطيات :-

⇐ $\frac{2}{2}\ \underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ \text{ع}(س) = \frac{8}{2}$

$\underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ \text{ع}(س) = 4$

⇐ $\frac{3}{3}\ \underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ \text{ل}(س) = \frac{7-1}{3}$

$\underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ \text{ل}(س) = 2$

أ) $\underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ 2 \times \text{ع}(س) + \underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ \text{ل}(س)$

$= 2 \times 4 + 2 = 10$

ب) $\underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ \text{ع}^2(س) - \underset{س \leftarrow 2}{\text{نها}}\ \text{ل}(س)$

$= (4)^2 - 2$

$= 16 - 2$

$= 14$

جـ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

د) $(4)^2 - (2)^2 =$

$16 - 4 = 12$

تدريب (1) أ- اذا كانت $\underset{س \leftarrow 3}{\text{نها}}\ (2س^2 + 3\text{هـ}^2(س) + 4)$ ، جد $\underset{س \leftarrow 3}{\text{نها}}\ \text{هـ}(س)$:

ب- $\underset{س \leftarrow 3}{\text{نها}}\ (2\text{ق}(س) + \frac{6}{س}) = 10$ ، $\underset{س \leftarrow 3}{\text{نها}}\ \frac{\text{هـ}(س) - س}{\text{ق}(س)} = -1$

جد $\underset{س \leftarrow 3}{\text{نها}}\ (\text{ق}^2(س) + \sqrt[3]{\text{هـ}(س)})$.

مثال (٩) : اذا كانت نها (س←٢) (٣ق(س) − ٤هـ(س) + س²) = ٤ ،
نها (س←٢) ((٢ق(س) − س²)/(س + ١) − هـ(س)) = ٥ ، جد نها (س←٢) (ق(س) + ٣هـ(س))
(علماً بأن النهايات موجودتان).

الحل:- نها (س←٢) (٣ق(س) − ٤هـ(س) + س²) = ٤

٣ نها (س←٢) ق(س) − ٤ نها (س←٢) هـ(س) + نها (س←٢) س² = ٤

⇐ نفرض ان أ = نها (س←٢) ق(س) و ب = نها (س←٢) هـ(س).

٣أ − ٤ب + ٤ = ٤ ⇐ ٣أ − ٤ب = ٠ ---- (١)

نها (س←٢) ((٢ق(س) − س²)/(س + ١) − هـ(س)) = ٥

(٢ نها (س←٢) ق(س) − ٤)/٣ − نها (س←٢) هـ(س) = ٥

٣× ((٢أ − ٤)/٣ − ب = ٥) ← ٢أ − ٤ − ٣ب = ١٥

٢أ − ٣ب = ١٩ --- (٢)

بحل المعادلتين:-

−٣× (٢أ − ٣ب = ١٩) ---- (٢)

−٢× (٣أ − ٤ب = ٠) ---- (١)

← ب = −٥٧ ← نها (س←٢) هـ(س) = −٥٧

أ = −٧٦ ← نها (س←٢) ق(س) = −٧٦

← نها (س←٢) (ق(س) + ٣هـ(س)) = نها (س←٢) ق(س) + ٣ نها (س←٢) هـ(س)

= −٧٦ − ١٧١

= −٢٤٧

مثال (٩) اذا كانت $\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\sqrt{\text{ق(س)}+٥\text{س}+\text{س}^٢}=٣$ ، اوجد $\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\ \text{ق}^٢\text{(س)}$

الحل

$$\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\sqrt{\text{ق(س)}+٥\text{س}+\text{س}^٢}=٣$$

$$\sqrt{\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\text{ق(س)}+٥\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\text{س}+\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\text{س}^٢}=٣$$ بتربيع الطرفين

$$\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\text{ق(س)}-٥+١=٩$$

$$\underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\text{ق(س)}=١٣ \leftarrow \underset{\text{س}\to-١}{\text{نها}}\text{ق}^٢\text{(س)}=(١٣)^٢$$

$$=١٦٩$$

مثال (١١) اذا كانت $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^٢}=-٢$ ، جد $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}}$.

ملاحظه في مثل هذه الحالة عند التعويض المباشر يكون الناتج في المقام صفر لذلك نعمل على جعل المطلوب صورة طبق الاصل عن المعطيات .

الحل المعطيات :-

$$\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^٢}=-٢ \qquad (\text{س}^٢=\text{س}\times\text{س})$$

المطلوب :- $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}}\times\dfrac{\text{س}}{\text{س}}$

$$\leftarrow \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^٢}\times\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\text{س}=-٢\times٠=٠$$

مثال (١٢) : اذا كان $\underset{\text{س}\to٣}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^٢-٩}=٥$ ، جد $\underset{\text{س}\to٣}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}-٣}$.

$$\text{س}^٢-٩=(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)$$

الحل: $\underset{\text{س}\to٣}{\text{نها}}\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}-٣}\times\dfrac{\text{س}+٣}{\text{س}+٣}$

$$\lim_{س \to 3} \frac{\text{ق}(س)}{(س^2 - 9)} \times \lim_{س \to 3} س + 3 =$$

$$5 \times (3+3) = 5 \times 6 = 30$$

مثال (١٣) اذا كانت $\lim_{س \to 5} \frac{\text{ق}(س) - 7}{س - 5} = 4$ ، اوجد $\lim_{س \to 5} \frac{س^2 - 2س - 15}{\text{ق}(س) - 7}$.

الحل: $\lim_{س \to 5} \frac{س^2 - 2س - 15}{\text{ق}(س) - 7}$ (اقسم البسط والمقام على (س − ٥)).

$$\Leftarrow \lim_{س \to 5} \frac{\frac{س^2 - 2س - 15}{س - 5}}{\frac{\text{ق}(س) - 7}{س - 5}}$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to 5} \frac{\frac{\cancel{(س - 5)}(س + 3)}{\cancel{س - 5}}}{\frac{\text{ق}(س) - 7}{س - 5}} = \frac{\lim_{س \to 5} س + 3}{\lim_{س \to 5} \frac{\text{ق}(س) - 7}{س - 5}} = \frac{8}{4} = 2$$

تدريب :- اذا كانت $\lim_{س \to 1} \frac{\text{ق}(س) - 1}{س - 1} = 8$ ، فما قيمة $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 + 2س - 3}{\text{ق}(س) - 6}$

ملاحظات

١- يجوز تعويض الصورة مكان النهاية اذا كان الاقتران كثير حدود.

٢- النهاية = الصورة بشرط ما داخل النهاية كثير حدود.

٣- اذا كان ق(س) كثير حدود ويمر بالنقطة (أ ، ب) $\Leftarrow$ ق(أ) = ب

$\lim_{س \to أ} \text{ق}(س) = \text{ق}(أ) = ب$.

مثال (١٤)

اذا كان ق(س) كثير الحدود وكان ق(٢) = ٤ ، جد

$\lim_{س \to ٢}$ ($\sqrt{ق(س)}$ + ٨س) .

الحل: بما ان ق(س) كثير الحدود ⟸ نهاية ق(س) تساوي صورته .

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) = ٤

$\lim_{س \to ٢}$ ($\sqrt{ق(س)}$ + ٨س) = $\sqrt{\lim_{س \to ٢} ق(س)}$ + $\lim_{س \to ٢}$ ٨س

= $\sqrt{٤}$ + ١٦ = ٢ + ١٦

= ١٨

مثال (١٥)

اذا كان ق ، هـ كثير الحدود وكان $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٤ ، ٢هـ(٢) - ١ = ٩

جد $\lim_{س \to ٢^+}$ (٤ ق²(س) - ٣هـ(س)) .

الحل: ٢هـ(٢) - ١ = ٩ ⟸ $\frac{٢هـ(٢)}{٢}$ = $\frac{١٠}{٢}$ ⟸ هـ(٢) = ٥

⟸ $\lim_{س \to ٢^+}$ (٤ق²(س) - ٣هـ(س)) = ٤ $\lim_{س \to ٢^+}$ ق²(س) - ٣ $\lim_{س \to ٢^+}$ هـ(س)

= ٤ × (١٦) - ٣ × ٥

= ٦٤ - ١٥ = ٤٩

مثال (١٦)

اذا كان ق(س) كثير الحدود ويمر بالنقطة (-٣ ، ٤) وكانت $\lim_{س \to -٣}$ (س - ل(س)) = -١٠

فجد $\lim_{س \to -٣}$ (ق²(س) - ٢ل(س)) .

الحل :-

$\text{ق}(-٣) = ٤$

$\Leftarrow \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) = ٤$

نجرب المعطيات :

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}} س - \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \text{ل}(س) = -١٠$

$-٣ - \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \text{ل}(س) = -١٠$

$\Leftarrow \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \text{ل}(س) = ٧$

$\Leftarrow \underset{س \to -٣}{\text{نها}} \left(\text{ق}^٢(س) - ٢\text{ل}(س)\right) = ٤^٢ - ٢ \times ٧ = ١٦ - ١٤ = ٢.$

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \text{ق}(س) = ٤ = \text{ق}(٢)$

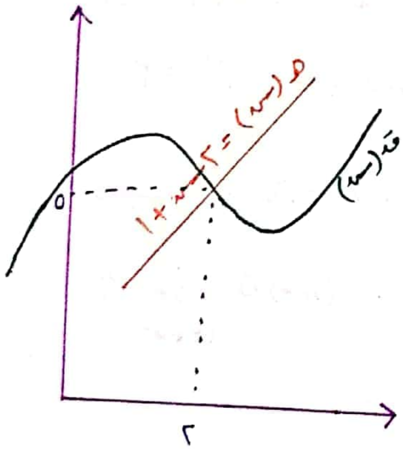
$= \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}$ لانه

(ق ، هـ) كثيرات حدود اي ان النهايه من اليمين تساوي النهاية من اليسار.

مثال (١٧)

اذا كان ق(س) كثير الحدود اعتماداً على الشكل المجاور ، اوجد

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(\text{ق}(س) - ٦س^٢ + ٩س\right)$



الحل

$٧ \times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \text{ق}(س) - ٦ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} س^٢ + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} ٩س$

$٧ \times \text{ق}(٢) - (٦ \times ٤) + ٩ \times ٢$

$= ٧ \times ٥ - ٢٤ + ١٨$

$= ٢٩.$

عند نقطه التقاطع ق(٢) = هـ(٢)

$= ٥$

مثال (١٨) اذا كان ق(س) كثير الحدود منحناه يمر بالنقطه (٣، ٥) ، (٧، ٩) احسب $\lim_{س \to ٣}$ ق(س).

الحل :- ق(س) اقتران كثير الحدود ⇐ النهاية = الصورة.

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ق(٣) = ٥ (الاحداثي الصادي للزوج المرتب (س، ق(س))).

مثال (١٩) اذا كان ق(س) كثير الحدود من الدرجة الاولى. وكان منحناه يمر بالنقطتين (١، ٢) ، (٣، ٥) اوجد $\lim_{س \to ١٥}$ ق(س).

الحل :- نفرض ق(س) = أس + ب

(١، ٢) ← ق(١) = ٢ ← أ + ب = ٢ ---- ①

(٣، ٥) ← ق(٣) = ٥ ← ٣أ + ب = ٥ --- ②

معادلة (١) - معادلة (٢)

أ = $\frac{٣}{٢}$ ← نعوض في (١) $\frac{٣}{٢}$ + ب = ٢ ⇐ ب = $\frac{١}{٢}$

ق(س) = $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$

⇐ $\lim_{س \to ١٥}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١٥}$ ($\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$)

= $\frac{٣}{٢}$ × ١٥ + $\frac{١}{٢}$

= $\frac{٤٥ + ١}{٢}$ = $\frac{٤٦}{٢}$

= ٢٣.

ملاحظة

المقسوم = (خارج القسمة × المقسوم عليه) + الباقي

مثال (٣٠) اذا كان كثير الحدود باقي قسمة على (س-٢) يساوي ٥ ، جد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(٣\text{ع}(س) + ٤س^٢\right)$.

الحل:- المقسوم = (خارج القسمة × المقسوم عليه) + الباقي.

$$\text{ع}(س) = \left(\text{ق}(س) \times (س-٢)\right) + ٥$$

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ع}(س) = \left(\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) \times \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ (س-٢)\right) + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ ٥$$

صفر

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ع}(س) = ٥$$

$$\Leftarrow ٣\ \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \text{ع}(س) + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}\ ٤س^٢ = ١٥ + ١٦ = ٣١$$

الاستبدال نلجأ الى الاستبدال عندما يكون ما داخل قوس ق ليس س

ق(جاس) ، ق(س²) ، ق(س+١)

ملاحظة $\underset{س \leftarrow a}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = \underset{ص \leftarrow a}{\text{نها}}\ \text{ق}(ص) = \underset{ع \leftarrow a}{\text{نها}}\ \text{ق}(ع)$.

طريقة الاستعمال.

(١) نفرض ما داخل القوس الموجود بعد ق يساوي ص.

(٢) نستبدل س ← عدد ليصبح ص ← عدد وهذا يختص فقط بالجزء الذي يحوي ق بالنهاية.

مثال (٣١) اذا كان $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\ \text{ق}(٢س+١) = ٥$ ، $\text{ق}(٣) = ٤$ ، جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}\ ٣\text{ق}^٢(س) - ٢س + ١$.

الحل: نفرض ص = ٢س + ١

عندما س ← ١ ، ص ← ٣

← $\underset{ص \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(ص) = ٥

← ٣ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق²(س) − $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (٢س − ١)

= ٣×(٥)² − ٥ = ٧٥ − ٥ = ٥

مثال (٢٢) اذا كان $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣ ، جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (ق (٤س − ١١) + ٣س² + ٢)

الحل:- نجهز المطلوب ، ثم نستخدم الاستبدال.

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(٤س − ١١) + $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ٣س² + $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ٢

$\underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(ص) + ٢٧ + ٢ = ٣ + ٢٧ + ٢

= ٣٢.

نفرض ص = ٤س − ١١

عندما س ← ٣

ص ← ١

(٤×٣ − ١١)

= (١٢ − ١١ = ١)

مثال (٢٣) اذا كان ق(س) كثير الحدود من الدرجة ن ويمر بالنقطة (٤، ٦) ، (−١، ٦) جد $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ق (٦س² + ٢س).

الحل: $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ق (٦س² + ٢س)

= $\underset{ص \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(ص) = ٦

نفرض ص = ٦س² + ٢س

عندما س ← −١

ص ← ٤

لانه كثير الحدود

$\underset{ص \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(ص) = ٦.

مثال (٢٤) اذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س² + ١) = ٣، فاوجد $\underset{س \leftarrow .}{\text{نهـا}}$ (٣ق(٢س + ٢) + ٧س)

الحل:- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س² + ١) = ٣

نفرض ان ص = س² + ١

عندما س ← ١

ص ← ٢

← نها ق(ص) = ٣
ص ← ٢

← ٢ نها ق(٢س + ٢) + نها ٧س .
س ← ٠　　　　س ← ٠

ع = ٢س + ٢
عندما س ← ٠
ع ← ٢

٢ نها ق(ع) + ٠
ع ← ٢

= ٢×٣ = ٦

صهيب شقيرات 0788879679

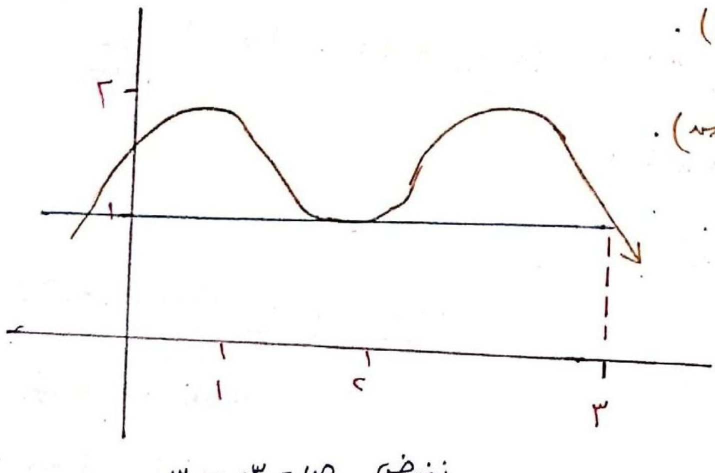
إيجاد النهاية من الرسم البياني.

ملاحظة اذا كان معامل س داخل قوس ق سالب او كانت س في المقام؛ نجعل اليمين يسار واليسار يمين.

مثال (٢٥) معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ل(س)، جد كلاً مما يلي:-

(١) نها ل(٣س − ٣) .
س ← ١

(٢) نها (ل(س) + س) .
س ← ٢



الحل:-

(١) نها ل(٣س − ٣)
س ← ٢

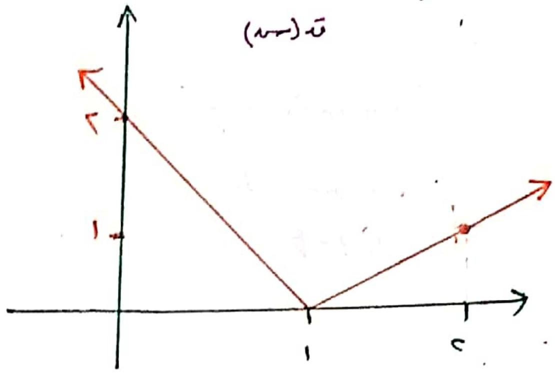
نفرض ص = ٣س − ٣
س ← ٢
ص ← ٣

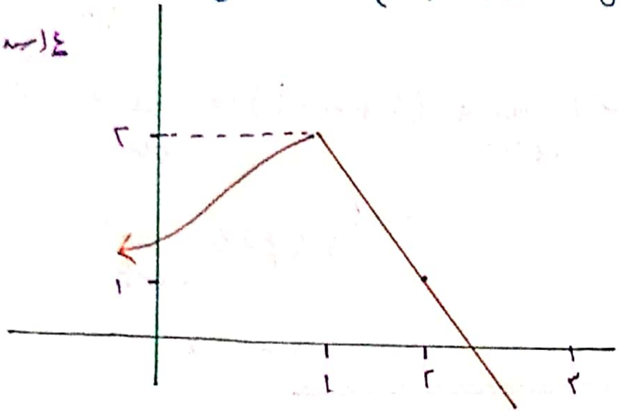
نها ل(ص) = ١
ص ← ٣

(٢) نها (ل(س) + س) = ١ + ٢ = ٣
س ← ٢

مثال (٦)

معتمداً على الشكل المجاور -يمثل منحنى ق(س) ، ومنحنى ع(س) ، جد كل مما يلي :-





الحل :-

ص = س − ١
س ← ١
ص ← ٠

١) نها (س←١) (ق(س) + ع(س)) = صفر + ٢ = ٢

٢) نها (س←٢) (ق(س) × ع(س)) = نها (س←٢) ق(س) × نها (س←٢) ع(س)

= ١ × ١ = ١

٣) نها (س←١) (٢ ق(س − ١) + ع(س)) = ٢ × نها (س←١) ق(س − ١) + نها (س←١) ع(س)

= ٢ × نها (ص←٠) ق(ص) + ٢

= ٢ × ٢ + ٢ = ٦

نهاية بعض الاقترانات الخاصة :-

- نهاية الجذور :-

- الجذور الفردية :- (تعويض مباشر) . شرط انه يكون ما داخل الجذر كثير الحدود .
- الجذور الزوجية (تعويض داخل الجذر تعويض مباشر)

(١) داخله موجب ← النهاية موجودة وتساوي الناتج.

(٢) داخله سالب ← النهاية غير موجودة .

(٣) داخله صفر ← مشكلة ← نعمل على دراسة المجال وايجاد النهاية من الطرفين .

مثال (٢٧) جد قيمة كل مما يلي :-

(١) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٢س - ٤} = \sqrt{٦ - ٤} = \sqrt{٢}$

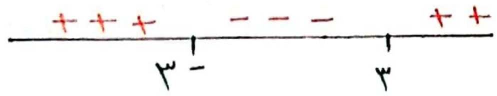
(٢) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{١ - س} = \sqrt{١ - - ٣} = \sqrt{-٢}$ غير موجودة.

(٣) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س + ١} = \sqrt{٢}$

(٤) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^٢ - ٩} = \sqrt{٩ - ٩} = \sqrt{٠}$ نبحث عن الإشارة.

$س^٢ - ٩ = ٠ \leftarrow (س - ٣)(س + ٣)$

$س = ٣ ، -٣$

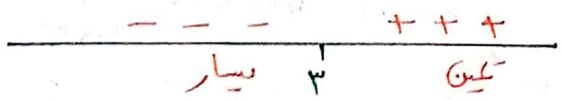


نبحث الاشارة حول ٣

$\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س^٢ - ٩} = ٠$

$\lim_{س \to ٣^-} \sqrt{س^٢ - ٩} =$ غير موجودة. $\therefore \lim_{س \to ٣} \sqrt{س^٢ - ٩}$ غير موجودة (غ٠م).

(٥) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٣}$



$س - ٣ \ge ٠$

$س \ge ٣$

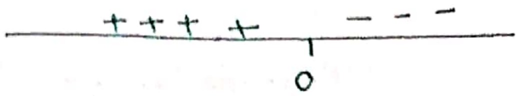
$\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س - ٣} =$ صفر ، $\lim_{س \to ٣^-} \sqrt{س - ٣}$ غ٠م

$\therefore \lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٣}$ غ٠م

(٦) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{١٠ - ٥س}$ ناتج التعويض داخل الجذر يساوي صفر

ندرس المجال : $١٠ - ٥س \ge ٠ \Leftarrow س \le ٥$

$\lim_{س \to 5^{+}} \sqrt{10 - 5س}$ غ.م



$\lim_{س \to 5^{-}} \sqrt{10 - 5س} =$ صفر ∴ $\lim_{س \to 5} \sqrt{10 - 5س}$ غ.م.

(7) $\lim_{س \to 3^{-}} \sqrt{\frac{س - 3}{9 - س}} =$ صفر

ندرس المجال : $\frac{س - 3}{9 - س} \geq 0$

اصفار البسط ← س = 3

اصفار المقام ← س = 9

$\lim_{س \to 3^{-}} \sqrt{\frac{س - 3}{9 - س}}$ غ.م

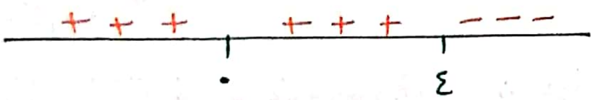
(8) $\lim_{س \to 0} \sqrt{4س^{2} - س^{3}}$

∴ $4س^{2} - س^{3} \geq 0$

$س^{2}(4 - س) \geq 0$

$س = 0$

$س \leq 4$



$\lim_{س \to 0^{+}} \sqrt{4س^{2} - س^{3}} = 0$

$\lim_{س \to 0^{-}} \sqrt{4س^{2} - س^{3}} = 0$ } ← $\lim_{س \to 0} \sqrt{4س^{2} - س^{3}} = 0$

(9) $\lim_{س \to 1} \sqrt{س^{2} - 2س + 1} = \sqrt{0}$

$س^{2} - 2س + 1 \geq 0$

$(س - 1)(س - 1) \geq 1$

$\boxed{س = 1}$

$\lim_{س \to 1^{+}} \sqrt{س^{2} - 2س + 1} = 0$

$\lim_{س \to 1^{-}} \sqrt{س^{2} - 2س + 1} = 0$ } ← $\lim_{س \to 1} \sqrt{س^{2} - 2س + 1} = 0$

نهاية الاقتران المتشعب

- يجب تحديد نوع النقطة المطلوب حساب النهاية عندها فإذا كانت :-

١- داخلة في الفترة ← نعوض مباشرة في القاعدة المناسبة .

٢- طرف الفترة ← تكون النهاية موجودة من طرف واحد فقط .

٣- نقطة تحول ← نجد النهاية من اليمين واليسار (س>٠ ، س<٠) .

مثال (٢٨)

اذا كانت ق(س) = { ٢س+١ ، ١ ≤ س < ٣ ؛ س^٢+١ ، ٣ ≤ س < ٥ ؛ ٥س ، س ≥ ٥ }

ملاحظة النهاية عند أطراف الفترات غير موجودة .

اوجد :-

١) نها ق(س) عندما س←٢ = نها (٢س+١) عندما س←٢ = ٢×٢+١ = ٥

٢) نها ق(س) عندما س←٤ = نها (س^٢+١) عندما س←٤ = (٤)^٢+١ = ١٧

٣) نها ق(س) عندما س←٦ = نها ٥س عندما س←٦ = ٥×٦ = ٣٠

٤) نها ق(س) عندما س←١ ⇐ نها ق(س) عندما س←+١ = نها (٢س+١) عندما س←+١ = ٢×١+١ = ٣

نها ق(س) عندما س←-١ غ.م ⇐ نها ق(س) عندما س←١ غ.م

٥) نها ق(س) عندما س←٣ ⇐ نها ق(س) عندما س←+٣ = نها (س^٢+١) عندما س←+٣ = ٩+١ = ١٠

نها ق(س) عندما س←-٣ = نها (٢س+١) عندما س←-٣ = ٧ ⇐ نها ق(س) عندما س←٣ غ.م

(٦) $\lim_{س\leftarrow ٥}$ ق(س) ⟸ $\lim_{س\leftarrow ٥^+}$ ٥س = ٥×٥ = ٢٥

$\lim_{س\leftarrow ٥^-}$ (س^٢+١) = ٢٦ ∴ $\lim_{س\leftarrow ٥}$ ق(س) غ.م

ملاحظة اذا جاء الاقتران المتشعب على صورة (= و ≠) ، (∈ او ∉) فإن النهاية تحسب عند (≠ ، ∉).

مثال (٢٩) اذا كان ل(س) =
- ٢س + ١ ، س ∈ ص
- س^٢ + ٤ ، س ∉ ص.

جد قيمة النهايات التالية علماً ان ص مجموعة الاعداد الصحيحة.

١) $\lim_{س\leftarrow ٢}$ ل(س) = $\lim_{س\leftarrow ٢}$ (س^٢+٤) = ٨

٢) $\lim_{س\leftarrow \frac{1}{2}}$ ل(س) = $\lim_{س\leftarrow \frac{1}{2}}$ (س^٢+٤) = $\frac{1}{4}$ + ٤ = $\frac{17}{4}$

مثال (٣٠) اذا كان ق(س) =
- س^٢ + ٤س ، س ≠ ١
- ٢س − ٣ ، س = ١

جد كل مما يلي :-

١) $\lim_{س\leftarrow ١}$ ق(س) = $\lim_{س\leftarrow ١}$ س^٢ + ٤س = ١ + ٤ = ٥

٢) $\lim_{س\leftarrow ٢}$ ق(س) = $\lim_{س\leftarrow ٢}$ س^٢ + ٤س = ٤ + ٨ = ١٢

مثال (٣١) اذا كان ق(س) =
- س^٢ + ٣س ، ١ ≤ س < ٣
- ٢س − ١ ، ٣ ≤ س < ٥
- س^٢ − ٢س + ١ ، س ≥ ٥

اوجد مايلي :-

١) نها ق(س+١)
س←١

الحل:

نفرض أن
ص = س+١
س ← ١ ، ص ← ٢

نها ق(ص) = نها س² + ٣س
ص←٢ س←٢

= (٢)² + ٣×٢

= ٤ + ٦ = ١٠

٢) نها ق(٢س+١)
س←١

الحل:

نفرض أن ص = ٢س+١
س ← ١
ص ← ٣

نها ق(ص) ⇐ نها س² + ٣س
ص←٣ س←٣⁻

= ٩+٩ = ١٨

⇐ نها ٢س − ١
س←٣⁺

= ٦ − ١ = ٥

⇐ نها ق(٢س+١) غ.م.
س←١

نهاية الاقتران المطلق :-

- نهاية المطلق (نعوض مباشرة مالم يكن ناتج التعويض ÷)
- سالب ← نزيل اشارة القيمة المطلقة ونعكس الاشارة ثم نعوض.
- صفر ← نعيد التعريف ونجد النهاية من اليمين و اليسار.
- موجب ← نزيل اشارة القيمة المطلقة ونعوض مباشرة.

أهم خصائص القيمة المطلقة :-

(١) |س| = أ ← س = ± أ

(٢) |س| < أ ← −أ < س < أ

(٣) |س| > أ ← س > أ او س < −أ

(٤) |س²| = س²

(٥) √س² = |س|

مثال (٣٢) جد قيمة كل مما يلي :-

الحل :

١) نها (س ← ٣) (|٢س − ٤| + |٢ − س|)

= (|٢×٣ − ٤| + |٢ − ٣|) = ٢ + |−١| = ٢ + ١ = ٣

٢) نها (س ← −١) (|٢س| − ٣) / (١ − |س|) = (|٢×−١| − ٣) / (١ − |−١|) = −١ / ٠ ⇐ غير موجودة

٣) نها (س ← −٣) |س² − ٩| = ٠   بتغيير التعريف

س² − ٩ = ٠

س² = ٩

س = ± ٣

س² − ٩	−٣	٩ − س²	٣	س² − ٩
+ +		− −		+ +

نها (س ← −٣) ٩ − س² = ٠

٤) نها (س ← +٢) |س² − ٤| = ٠

س² − ٤ = ٠

س = ± ٢

س² − ٤	−٢	٤ − س²	٢	س² − ٤
+ +		− −		+ +

نها (س ← +٢) س² − ٤ = ٠

٥) نها (س ← ١٦) |س − ١٦| = ٠

س = ١٦

− − −	١٦	+ +

نها (س ← +١٦) س − ١٦ = صفر

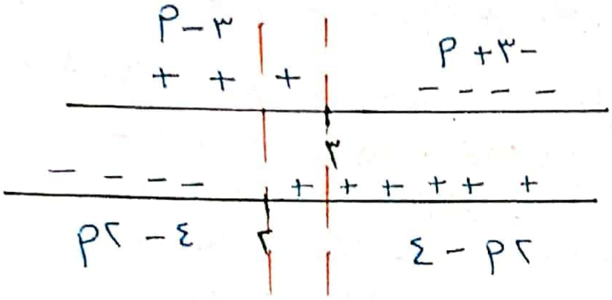
نها (س ← −١٦) ١٦ − س = صفر

} ← نها (س ← ١٦) |س − ١٦| = صفر

مثال (٣٣) اذا كانت $\lim_{س \to م} |٣ - س| - |٢س - ٤| = ٨$ فما قيمة م ؟

الحل :-

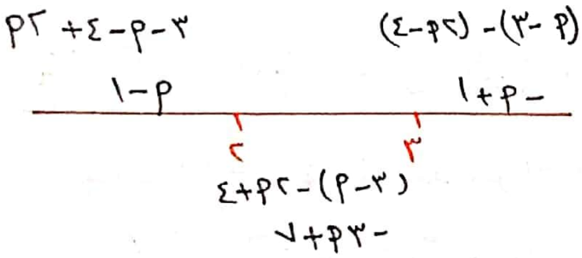
$٨ = |٣ - م| - |٢م - ٤|$



$-م + ١ = ٨ \Leftarrow م = ٩$

لا تقع ضمن $(س < م)$

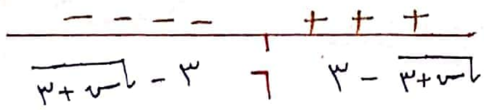
$-٣م + ٧ = ٨ \Leftarrow -٣م = ١$



$م = \frac{-١}{٣}$ × خارج الفترة $[٢ ، ٣]$

$م - ١ = ٨ \Leftarrow م = ٩$ × خارج الفترة.

مثال (٣٤) جد $\lim_{س \to ٦^{+}} |\sqrt{س + ٣} - ٣|$



$\sqrt{س + ٣} - ٣ = ٠$

$(\sqrt{س + ٣})^{٢} = (٣)^{٢}$

$س + ٣ = ٩$

$\boxed{س = ٦}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٦^{+}} \sqrt{س + ٣} - ٣ = صفر$

اقتران اكبر عدد صحيح

نفوض ما داخل الصحيح تفويض مباشر :-

← اذا كان الناتج عدد غير صحيح نجد اكبر عدد صحيح بغض النظر عن الاتجاه .

← اذا كان الناتج عدد صحيح نجد الناتج من الطرفين (ع.م)

- الحل عن طريق المادة تعريف اكبر عدد صحيح .
- الحل عن طريق الخصائص :-

← اذا كان معامل س والجهة المطلوبة نفس الاشارة ← تفويض مباشر

← اذا كان معامل س والجهة المطلوبة عكس الاشارة ← نعوض ثم نطرح واحد .

مثال (٣٥)

جد قيمة كل من النهايات التالية :-

١) نها (س ← ٠) [٢س - ٤,٠] = [-٤,٠] = -١

بما ان ناتج التعويض عدد غير صحيح نأخذ اكبر عدد صحيح له .

∴ نها (س ← ٠) [٢س - ٤,٠] = -١

٢) نها (س ← ١) [س + ١]

بما ان ناتج التعويض عدد صحيح ← ١- التعريف ٢- خصائص .

١- س + ١ = ٠ ، س = -١

ل = ١

نها (س ← ١⁺) = ٢ ، نها (س ← ١⁻) ١ = ١

∴ نها (س ← ١) [س+١] غ.م

٢- نها (س ← ١) [س + ١] غ.م

نها (س ← ١⁺) [س + ١] = ٢

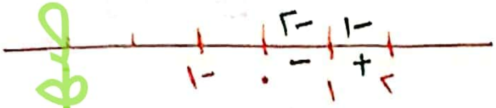
نها (س ← ١⁻) [س + ١] = ١+١-١ = ١

خواص اكبر عدد صحيح :

١- اذا كان [ق(س)] = أ ، أ : عدد صحيح   أ ≤ ق(س) < أ + ١

٢- [أس + ب] = [أس] + ب   شرط ب ∈ ص .

٣) $\text{نها}_{س \to ١} [س - ٢]$



١- التعريف :-

س − ٢ = ٠

س = ٢

ل = ١

$\text{نها}_{س \to ١^+} ١ = -١$

$\text{نها}_{س \to ١^-} ١ = -٢$

← $\text{نها}_{س \to ١} [س - ٢]$ غ.م

٢- الخصائص :-

$\text{نها}_{س \to ١} [س - ٢]$ غ.م

← تعويض مباشر لان الاتجاه نفس معامل س $\text{نها}_{س \to ١^+} [س - ٢] = -١$

← تعويض مباشر لان الاتجاه عكس معامل س $\text{نها}_{س \to ١^-} [س - ٢] = -٢$

مثال (٣٦) اوجد النهايات التالية :-

١) $\text{نها}_{س \to ١} [س + ٥]$

الحل : $\text{نها}_{س \to ١^+} [س + ٥] = \text{نها}_{س \to ١^+} ٦ = ٦$

$\text{نها}_{س \to ١^-} [س + ٥] = \text{نها}_{س \to ١^-} ٥ = ٥$

← $\text{نها}_{س \to ١} [س + ٥]$ غ.م

⇐ ملاحظة ١) اذا كان أ ∈ ص

$\text{نها}_{س \to أ^+} [س] = أ$ ، $\text{نها}_{س \to أ^-} [س] = أ - ١$

لذلك $\text{نها}_{س \to أ} [س]$ غير موجودة لان أ ≠ أ − ١

٢) اذا كان أ ∉ ص فان

$\text{نها}_{س \to أ^+} [س] = \text{نها}_{س \to أ^-} [س] = [أ]$.

$\text{ل} = \frac{١}{|١١-١|} = ١$

$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣ & ٠ < \text{س} \leq ١ \\ ٢ & ١ < \text{س} \leq ٢ \\ ١ & ٢ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

٣ ٢ ١

٠ ١ ٢

$- \quad +$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} [٤ - \text{س}]$

$\underset{\text{س} \leftarrow ^{+}١}{\text{نها}} [٤ - \text{س}] = \underset{\text{س} \leftarrow ^{+}١}{\text{نها}} ٢ = ٢$

$\underset{\text{س} \leftarrow ^{-}١}{\text{نها}} [٤ - \text{س}] = \underset{\text{س} \leftarrow ^{-}١}{\text{نها}} ٣ = ٣$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} [٤ - \text{س}]$ غ.م

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} (\text{س} + ١)^{[\text{س}]}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ^{+}٠}{\text{نها}} (\text{س} + ١)^{٠} = \underset{\text{س} \leftarrow ^{+}٠}{\text{نها}} ١ = ١$

$\underset{\text{س} \leftarrow ^{-}٠}{\text{نها}} (\text{س} + ١)^{-١} = \underset{\text{س} \leftarrow ^{-}٠}{\text{نها}} (١)^{-١} = ١$

$\Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} (\text{س} + ١)^{[\text{س}]} = ١$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \frac{[\text{س} + ١] - [\text{س} - ١]}{\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نها}} \frac{[\text{س}] + ١ - [\text{س}] + ١}{\text{س}} = \frac{٢}{٥}$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(|\text{س} - ٢| + [٦ - \text{س}] \right)$

$\underset{\text{س} \leftarrow ^{+}٢}{\text{نها}} \left(|\text{س} - ٢| + [٦ - \text{س}] \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ^{+}٢}{\text{نها}} \left((\text{س} - ٢) + ٣ \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ^{+}٢}{\text{نها}} ٣ = ٣$

$\underset{\text{س} \leftarrow ^{-}٢}{\text{نها}} \left(|\text{س} - ٢| + [٦ - \text{س}] \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ^{-}٢}{\text{نها}} \left((٢ - \text{س}) + ٤ \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ^{-}٢}{\text{نها}} ٤ = ٤$

$- - - \quad + + +$

(٢ - س)   ٢   (س - ٢)

$\Leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(|\text{س} - ٢| + [٦ - \text{س}] \right)$ غ.م

٦) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}-١|\right)$

← $\lim\limits_{\text{س}\to ١^+} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}-١|\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ١^+} \left(\text{س}\times ١ + \text{س}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ١^+} (٢\text{س})$

$= ٢ \times ١ = ٢$

← $\lim\limits_{\text{س}\to ١^-} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}-١|\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ١^-} \left(\text{س}\times \text{صفر} + \text{س}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ١^-} \text{س} = ١$

⇐ $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}-١|\right)$ غ.م

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣}$ ق(س) حيث ق(س) = $\begin{cases} |\text{س}-١| & : \text{س} \geq ٣ \\ [\text{س}-١] & : \text{س} < ٣ \end{cases}$

← $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣^+} |\text{س}-١| = \lim\limits_{\text{س}\to ٣^+} (\text{س}-١) = \lim\limits_{\text{س}\to ٣^+} ٢ = ٢$

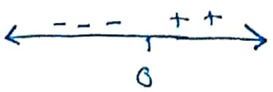
← $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣^-} [\text{س}-١] = \lim\limits_{\text{س}\to ٣^-} ١ = ١$

⇐ $\lim\limits_{\text{س}\to ٣}$ ق(س) غ.م

٢٠١٨/ صيفي اذا كان ق(س) = $\dfrac{\sqrt{\text{س}-٥} + ٣}{\text{س}^٢ + ٢}$ ، جد $\lim\limits_{\text{س}\to ٥}$ ق(س)

أ) $\frac{٣}{٢٧}$ ب) صفر ج) غ.م د) $\frac{١}{٤}$

توضيح : ناتج التعويض ليس $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ لكن ناتج التعويض ما داخل الجذر صفر لذلك نبحث النهاية من اليمين واليسار للعدد (٥)



∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ٥}$ ق(س) غ.م.

٢٠١٠/ صيفي/ وزاري. اذا كانت ق(س) كثير الحدود، وكان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) − ٥ = ٣ فإن $\lim_{س \to ١} \sqrt{٢ق(س)}$ =

أ) ١٦ ب) −٤ ج) ٤ د) غ٠م

الحل: $\lim_{س \to ١}$ ق(س) − ٥ = ٣ ← $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٣ + ٥ = ٨

$\lim_{س \to ١} \sqrt{٢ق(س)} = \sqrt{٢ \lim_{س \to ١} ق(س)}$

$= \sqrt{٢ \times ٨}$

$= \sqrt{١٦}$

$= ٤$

الدرس الثالث : نهايات اقترانات كسرية .

⇐ اذا كان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{ع(س)}$ اقتران نسبي وكان المطلوب ايجاد $\lim_{س \leftarrow أ} \frac{هـ(س)}{ع(س)}$

نعوض أ تعويض مباشر في البسط والمقام فيكون ناتج التعويض :-

حالة ١ : $\frac{عدد}{عدد}$ ← النهاية موجودة .

حالة ٢ : $\frac{صفر}{عدد}$ ← النهاية موجودة وتساوي صفر

حالة ٣ : $\frac{عدد}{صفر}$ ← النهاية غير موجودة (غ.م).

حالة ٤ : $\frac{صفر}{صفر}$ ← مشكلة قيمة غير محدودة ، لذلك يجب التخلص من هذه الصورة وذلك بتبسيط الاقتران و اظهار (س - أ) عامل مشترك في البسط والمقام ثم اختصار هذا العامل المشترك والتعويض من جديد ليكون ناتج التعويض واحدة من الحالات السابقة .

ويكون تبسيط من خلال :-

- التحليل
- توحيد المقامات
- طرح واضافة
- الاستبدال
- ضرب بالمرافق
- نهاية تحتوي جذور او مطلق او اكبر عدد صحيح .

مثال (١) : جد قيمة كل من النهايات التالية ان وجدت :-

١- $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢}{س - ٢} = \frac{٤}{٠} =$ غ.م

٢- $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \frac{صفر}{٢} =$ صفر

٣- $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{س^٢ + ١}{س} = \frac{١}{٠} =$ غ.م

٤- $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س + ١}{س ٢} = \frac{٣}{٤}$

تدريب : جد قيمة كل من النهايات التالية ان وجدت :-

١- $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{س^٤ - س}{س^٤ - ١} = \frac{٠}{-١} = ٠$

٢- $\underset{س \leftarrow ١}{نها} \frac{٣ س}{س - ١} = غ . م$

٣- $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{٤ س}{س + ١} = \frac{٤ \times ٢}{٢ + ١} = \frac{٨}{٣}$

التحليل :- الهدف هو القيام بعملية اختصار ثم تعويض ، لايجاد ناتج للنهاية :-

مثال (٢)

جد النهايات التالية :-

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{٢ س - س^٢}{س^٢ - ٤} = \frac{٤ - ٤}{٤ - ٤} = \frac{٠}{٠}$

$\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{س (\cancel{٢ - س})^{-١}}{(\cancel{س - ٢})(س + ٢)} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \frac{٢٧ - س^٣}{س^٢ - ٦ س + ٩} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{نها} \frac{(\cancel{٣ - س})^{-١} (٩ + ٣ س + س^٢)}{(\cancel{س - ٣})(س - ٣)}$

$= \frac{-١ \times (٩ + ٣ \times ٣ + ٣^٢)}{٣ - ٣} = \frac{-١ \times (٩ + ٩ + ٩)}{٠}$

$\frac{-٢٧}{٠}$ غير موجودة .

٣) $\underset{س \leftarrow -١}{نها} \frac{س^٢ - س - ٢}{٣ س^٢ + س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$\underset{س \leftarrow -١}{نها} \frac{(س - ٢)(\cancel{س + ١})}{(\cancel{س + ١})(٣ س - ٢)} = \underset{س \leftarrow -١}{نها} \frac{(س - ٢)}{(٣ س - ٢)} = \frac{-٣}{-٥}$

$= \frac{٣}{٥}$

٤) $\underset{\text{س} \to -5}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 10}{\text{س} + 5} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س} \to -5}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+5)(\text{س}-2)}{(\text{س}+5)} = \underset{\text{س} \to -5}{\text{نها}} (\text{س}-2) = -7$

تدريب :- جد نهاية كل من ما يلي :-

١) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2}$

٢) $\underset{\text{س} \to 8}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+1)^2 - 81}{\text{س} - 8}$

٣) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{(2\text{س}+5)^2 - 81}{\text{س} - 2}$

الحل :-

١) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)}{\cancel{\text{س}-2}}$

$= 2 + 2 = 4$

٢) $\underset{\text{س} \to 8}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+1)^2 - 81}{\text{س} - 8} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س} \to 8}{\text{نها}} \dfrac{((\text{س}+1)+9)((\text{س}+1)-9)}{\text{س} - 8} = \underset{\text{س} \to 8}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+10)\cancel{(\text{س}-8)}}{\cancel{\text{س}-8}} = 8 + 10 = 18$

٣) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{(2\text{س}+5)^2 - 81}{\text{س} - 2} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{((2\text{س}+5)+9)((2\text{س}+5)-9)}{\text{س} - 2} = \underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{(2\text{س}+14)(2\text{س}-4)}{\text{س} - 2}$

$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{(2\text{س}+14)(2\cancel{(\text{س}-2)})}{\cancel{\text{س}-2}} = (4 + 14) \times 2 = 18 \times 2 = 36$

مثال (3)

جد ناتج النهايات التالية :-

1) $\text{نها}_{س \to -1} \dfrac{س^5 + 1}{(س^2+1)(1+2س+س^2)} = \dfrac{0}{0}$

	س⁴	س³	س²	س	ثابت
	1	0	0	0	0	1
$\boxed{-1}$		-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	0

$= \text{نها}_{س \to -1} \dfrac{\cancel{(س+1)}(س^4 - س^3 + س^2 - س + 1)}{(س^2+1)\cancel{(1+س)}(1+س)}$

$= \text{نها}_{س \to -1} \dfrac{س^4 - س^3 + س^2 - س + 1}{(س^2+1)(1+س)} = \dfrac{5}{0}$ غ.م

2) $\text{نها}_{س \to 0} \dfrac{س^2 - 2س^3}{س^4 - 4س^3 + 3س} = \dfrac{0}{0}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \dfrac{س^{\cancel{2}}(1-2س)}{\cancel{س}(س^3 - 4س^2 + 3)} = \dfrac{0(1-2\times 0)}{3} =$ صفر

3) $\text{نها}_{س \to 1} \dfrac{س^3 + 3س - 4}{س^2 - 1} = \dfrac{0}{0}$

	س³	س²	س	ثابت
	1	0	3	-4
$\boxed{1}$		1	1	4
	1	1	4	0

$= \text{نها}_{س \to 1} \dfrac{\cancel{(س-1)}(س^2 + س + 4)}{\cancel{(س-1)}(س+1)}$

$= \dfrac{6}{2} = 3$

4) $\text{نها}_{س \to 2} \dfrac{(2س+1)^3 - 125}{س^2(س-2) - س + 2} = \dfrac{0}{0}$

	س³	س²	س	ثابت
	1	-2	-1	2
$\boxed{2}$		2	0	-2
	1	0	-1	0

$= \text{نها}_{س \to 2} \dfrac{((2س+1) - 5)((2س+1)^2 + 5(2س+1) + 25)}{(س-2)(س^2-1)}$

$= \text{نها}_{س \to 2} \dfrac{2\cancel{(س-2)}((2س+1)^2 + 5(2س+1) + 25)}{\cancel{(س-2)}(س^2-1)} = \dfrac{2\times 75}{3} = 50$

٥) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{3\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 4\text{س} - 5}{2\text{س}^3 + 3\text{س}^2 - 3\text{س} - 2} = \dfrac{0}{0}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - 1})(3\text{س}^2 + \text{س} + 5)}{(\cancel{\text{س} - 1})(2\text{س}^2 + 5\text{س} + 2)} = \dfrac{9}{9} = 1$

البسط

3	2-	4	5-
	3	1	5
3	1	5	0
س²	س	ثابت	

المقام

2	3	3-	2-
	2	5	2
2	5	2	0
س²	س	ثابت	

٦) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{لو}_{\text{أ}}\text{س})^2 + \text{لو}_{\text{أ}}\text{س} - 2}{\text{لو}_{\text{أ}}\text{س} - 1} = \dfrac{0}{0}$

$= \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{لو}_{\text{أ}}\text{س} + 2)(\cancel{\text{لو}_{\text{أ}}\text{س} - 1})}{(\cancel{\text{لو}_{\text{أ}}\text{س} - 1})}$

$= \text{لو}_{\text{أ}}\text{أ} + 2 = 1 + 2 = 3$

تساوي تقريبا ١

صهيب شقيرات 0788879679

ملاحظة التحليل النوني :

$(\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}) = (\text{س} - \text{أ})(\text{أ}^0\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{أ}^1\text{س}^{\text{ن}-2} + \text{أ}^2\text{س}^{\text{ن}-3} + \dots + \text{أ}^{\text{ن}-1}\text{س}^0)$

مثال

$(\text{س}^5 - 2^5) = (\text{س} - 2)(\text{س}^4 + 2\text{س}^3 + 4\text{س}^2 + 8\text{س} + 16)$

$(\text{س}^5 + 2^5) = (\text{س} + 2)(\text{س}^4 - 2\text{س}^3 - 4\text{س}^2 - 8\text{س} - 16)$

٧) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^5 - 1}{\text{س}^3 - 1} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - 1})(\text{س}^4 + \text{س}^3 + \text{س}^2 + \text{س} + 1)}{(\cancel{\text{س} - 1})(\text{س}^2 + \text{س} + 1)} = \dfrac{4}{3}$

ملاحظة

$(\text{س}^{\text{ن}} - 1) = (\text{س} - 1)(\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{س} + 1)$

$\text{ن} \in \text{ص}^+$

توحيد المقامات :-

مثال (٤) ، جد $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نها}} \dfrac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نها}} \dfrac{\frac{س+٣}{٣س}}{س^{٢}+٢س-٣} = \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س+٣)}}{٣س\,(س-١)\,\cancel{(س+٣)}} = \dfrac{١}{٣٦}$

مثال (٥) : جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{٣-س}{\frac{١}{س-١} - \frac{س}{س+٣}} = \dfrac{٣-٣}{\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٦}} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{٣-س}{\frac{س+٣-س\,(س-١)}{(س+٣)(س-١)}} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} (٣-س) \times \dfrac{(س-١)(س+٣)}{س+٣-س^{٢}+س}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{(٣-س)(س-١)(س+٣)}{-س^{٢}+٢س+٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{(٣-س)(س-١)(س+٣)}{-(س^{٢}-٢س-٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(٣-س)}(س-١)(س+٣)}{-\cancel{(س-٣)}(س+١)} = \dfrac{(٣-١)(٣+٣)}{٣+١} = \dfrac{٢\times٦}{٤} = ٣$ #.

مثال (٦) :- جد : $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{س}{٩-س^{٢}} + \dfrac{٣س}{س^{٣}-٩س} \right)$

الحل : $= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{٣س}{س^{٣}-٩س} + \dfrac{س}{٩-س^{٢}} \times \dfrac{-س}{-س} \right)$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{٣س}{س^{٣}-٩س} + \dfrac{-س^{٢}}{س^{٣}-٩س} \right) = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{٣س-س^{٢}}{س^{٣}-٩س}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س}(٣-س)}{\cancel{س}(س^{٢}-٩)} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \dfrac{-١\,\cancel{(س-٣)}}{(س+٣)\cancel{(س-٣)}} = \dfrac{-١}{٦}$

٢- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \left(\dfrac{٣}{س-١} - \dfrac{٢س+٤}{س^{٢}-١} \right) = \dfrac{٣}{٠} - \dfrac{٦}{٠}$

الحل :- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \left(\dfrac{٣(س+١)}{(س-١)(س+١)} - \dfrac{٢س+٤}{س^{٢}-١} \right) = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{٣س+٣-٢س-٤}{س^{٢}-١}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س-١}}{\cancel{(س-١)}(س+١)} = \dfrac{١}{١+١} = \dfrac{١}{٢}$.

الضرب بالمرافق

اقتران يتضمن جذر تربيعي او اكثر في البسط او في المقام او في كليهما، نبسط بالضرب بالمرافق التربيعي للجذر التربيعي اينما وجد.

المرافق التربيعي يرتبط بفرق المربعين

$\text{س}^2 - \text{أ}^2 = (\text{س} - \text{أ})(\text{س} + \text{أ})$ تحليل الفرق بين مربعين.

حلل س − أ على اعتباره فرق بين مربعين.

فيكون $\text{س} - \text{أ} = (\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}})(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{أ}})$

فإذا وجد في النهاية مقدار يتضمن جذور تربيعية مثل:

$\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}}$ نضرب ب $\dfrac{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{أ}}}$

قيمة المرافق دائما (1) حتى لا يتغير من قيمة النهاية ويكون بنفس صورة المقدار الاصلي مع عكس الاشارة بين الحدين.

ملاحظة عند ضرب مقدارين مترافقين يكون الناتج (مربع الاول − مربع الثاني)

$(\sqrt{\text{س}} - 3)(\sqrt{\text{س}} + 3) = \text{س} - 9$

مثال (7) جد ناتج :-

1) $\lim_{\text{س}\to 3} \dfrac{\sqrt{\text{س}+2} - \sqrt{5}}{\sqrt{\text{س}+1} - 2} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+2} + \sqrt{5}}{\sqrt{\text{س}+2} + \sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+1} + 2}{\sqrt{\text{س}+1} + 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 3} \dfrac{(\text{س}+2-5) \times \sqrt{\text{س}+1} + 2}{(\text{س}+1-4)\sqrt{\text{س}+2} + \sqrt{5}} = \lim_{\text{س}\to 3} \dfrac{\cancel{(\text{س}-3)}\sqrt{\text{س}+1} + 2}{\cancel{(\text{س}-3)}\sqrt{\text{س}+2} + \sqrt{5}}$

$= \dfrac{\sqrt{3+1} + 2}{\sqrt{3+2} + \sqrt{5}} = \dfrac{2+2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\cancel{4}\,2}{\cancel{2}\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

2) $\lim_{\text{س}\to 3} \dfrac{2 - \sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{\text{س}-2} - 1} \times \dfrac{2 + \sqrt{\text{س}+1}}{2 + \sqrt{\text{س}+1}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}-2} + 1}{\sqrt{\text{س}-2} + 1}$

$= \lim_{\text{س}\to 3} \dfrac{4 - (\text{س}+1)}{(\text{س}-2) - 1} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}-2} + 1}{2 + \sqrt{\text{س}+1}} = \lim_{\text{س}\to 3} \dfrac{4 - \text{س} - 1}{\text{س} - 2 - 1} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}-2} + 1}{2 + \sqrt{\text{س}+1}} = \lim_{\text{س}\to 3} \dfrac{-\cancel{(\text{س}-3)}}{\cancel{\text{س}-3}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}-2} + 1}{2 + \sqrt{\text{س}+1}}$

$= \dfrac{-1 \times (1+1)}{2+2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\sqrt{\text{س}^2+7}-\sqrt{\text{س}+13}}{\sqrt{\text{س}+1}-2} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}^2+7}+\sqrt{\text{س}+13}}{\sqrt{\text{س}^2+7}+\sqrt{\text{س}+13}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+1}+2}{\sqrt{\text{س}+1}+2}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\text{س}^2+7-\text{س}-13}{\text{س}+1-4} \times \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\sqrt{\text{س}+1}+2}{\sqrt{\text{س}^2+7}+\sqrt{\text{س}+13}} = \dfrac{4}{8} \times \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\text{س}^2-\text{س}-6}{\text{س}-3}$

$= \dfrac{1}{2} \times \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}+2)}{\cancel{(\text{س}-3)}} = \dfrac{1}{2} \times (3+2) = \dfrac{1}{2} \times 5 = \dfrac{5}{2}$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{\text{س}+1}}-2}{\dfrac{\text{س}}{6}-\dfrac{3}{2\text{س}}} \times \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{\text{س}+1}}+2}{\sqrt{2+\sqrt{\text{س}+1}}+2}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{2+\sqrt{\text{س}+1}-4}{\dfrac{2\text{س}^2-18}{12}} \times \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{\text{س}+1}}+2} = \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\sqrt{\text{س}+1}-2}{2(\text{س}^2-9)} \times \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{12\text{س}}{\sqrt{2+\sqrt{\text{س}+1}}+2}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\sqrt{\text{س}+1}-2}{2(\text{س}^2-9)} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+1}+2}{\sqrt{\text{س}+1}+2} \times \dfrac{12\times 3}{2+2} = 9\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{(\text{س}+\cancel{1}-4)}{2(\cancel{\text{س}-3})(\text{س}+3)\times 4} = \dfrac{9}{2} \times \dfrac{1}{4\times 6}$

$= \dfrac{3}{16}$

ملاحظة :-
استخدام مرافق الجذر التربيعي لثلاثة حدود :-
نجزئ الثلاثة حدود الى حدين فقط نجعل الجزء الذي يحوي الجذر حد والباقي حد.

صهيب شقيرات 0788879679
قصبة اربد

مثال (٨) جد ناتج ما يلي :-

١- $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}-4\sqrt{\text{س}}+3}{(\text{س}^2-1)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}+3)-4\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}^2-1)} \times \dfrac{(\text{س}+3)+4\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}+3)+4\sqrt{\text{س}}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}+3)^2-16\text{س}}{(\text{س}^2-1)(\text{س}+3+4\sqrt{\text{س}})} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}^2+6\text{س}+9-16\text{س}}{(\text{س}^2-1)} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}^2-10\text{س}+9}{\text{س}^2-1}$

$= \dfrac{1}{8}\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}-9)\cancel{(\text{س}-1)}}{(\text{س}+1)\cancel{(\text{س}-1)}} = \dfrac{1}{\cancel{8}} \times \dfrac{-\cancel{8}}{2}$

$= \dfrac{-1}{2}$

٢- $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}+١} - ١} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{(\text{س}-١) - \sqrt{\text{س}+١}} \times \dfrac{(\text{س}-١) + \sqrt{\text{س}+١}}{(\text{س}+١) + \sqrt{\text{س}+١}}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{(\text{س}-١)^٢ - \text{س} - ١} \times ٤ = ٤ \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١ - \text{س} - ١} = ٤ \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}(\text{س}-٣)}{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}$

$= ٤ \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{س}}\cancel{(\text{س}-٣)}}{\cancel{\text{س}}\cancel{(\text{س}-٣)}} = ٤ \times ١ = ٤$

مثال (٩) :- جد قيمة النهاية في كل مما يأتي، ان وجدت ؟

١) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤\text{س}}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}+٣)} = \dfrac{٤}{٤+٣} = \dfrac{٤}{٧}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥\text{س}^٢ - ١٠\text{س}}{\text{س} - ٢} = \dfrac{٠}{٠}$ ← في هذه الحالة يجب التفكير في اخراج عامل مشترك او التحليل او الضرب بالمرافق

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{(\text{س}-٢)}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} ٥\text{س} = ٥ \times ٢ = ١٠$

٣) $\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٣٠}{\text{س}^٢ + ٥\text{س}} = \underset{\text{س}\to -٥}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٦)\cancel{(\text{س}+٥)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}+٥)}} = \dfrac{-١١}{-٥} = \dfrac{١١}{٥}$

ملاحظة في جميع حالات التحليل في نهايات $\left(\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ يمكن دائمًا استخدام القسمة التركيبية في تحليل العبارات التربيعية

مثال (١٠) حلل العبارة التربيعية التالية

$٤\text{س}^٢ - ١٧\text{س} + ٤$

$\boxed{٤}$	٤	١٧-	٤
	٠	١٦	٤-
	٤	١-	٠

$(\text{س} - ٤)(٤\text{س} - ١)$

- النهاية باستخدام مرافق الجذر التكعيبي :-

1) $\text{س}^3 - \text{أ}^3 = (\text{س} - \text{أ})(\text{س}^2 + \text{أس} + \text{أ}^2)$

مرافق $(\text{س} - \text{أ})$ هو $(\text{س}^2 + \text{أس} + \text{أ}^2)$ وناتج ضربهما = مكعب الاول − مكعب الثاني

2) $\text{س}^3 + \text{أ}^3 = (\text{س} + \text{أ})(\text{س}^2 - \text{أس} + \text{أ}^2)$

مرافق $\text{س} + \text{أ}$ هو $\text{س}^2 - \text{أس} + \text{أ}^2$ وناتج ضربهما = مكعب الاول + مكعب الثاني

ويستخدم للجذور التكعيبية : المرافق = مربع الاول عكس الاشارة (الاول × الثاني) + مربع الثاني.

ولتحليل $\text{س} \pm \text{أ}$ على اعتبار انه فرق او مجموع مكعبين :-

$$\text{س} \pm \text{أ} = \left(\sqrt[3]{\text{س}} \pm \sqrt[3]{\text{أ}}\right)\left(\sqrt[3]{\text{س}}^{\,2} \mp \sqrt[3]{\text{س}}\,\sqrt[3]{\text{أ}} + \sqrt[3]{\text{أ}}^{\,2}\right)$$

لـ النهاية تتضمن جذور تكعيبية على هذه الصورة لذلك نضرب بالقوس الاخر مقسومًا على نفسه لتبقى دائمًا قيمة المرافق (1).

صهيب شقيرات 0788879679

مثال (11): جد قيمة كل مما يأتي :-

تذكير: $\sqrt[3]{\text{س}^3} = \sqrt[3]{\text{س}}^{\,3} = \text{س}$

1) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+5} - 2}{2\text{س} - 6} = \frac{2-2}{6-6} = \frac{0}{0}$

الحل:- $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+5} - 2}{2\text{س} - 6} \times \frac{\sqrt[3]{\text{س}+5}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+5} + 4}{\sqrt[3]{\text{س}+5}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+5} + 4}$

$\displaystyle = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س}+5) - 8}{2(\text{س}-3)\left(\sqrt[3]{\text{س}+5}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+5} + 4\right)}$

$\displaystyle = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\cancel{(\text{س}-3)}}{2\cancel{(\text{س}-3)}\left(\sqrt[3]{\text{س}+5}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+5} + 4\right)} = \frac{1}{2 \times (4+4+4)} = \frac{1}{24}$

2) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 7} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+1} - 2}{\text{س} - 7} \times \frac{\left(\sqrt[3]{\text{س}+1}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)}{\left(\sqrt[3]{\text{س}+1}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)}$

$\displaystyle = \lim_{\text{س} \to 7} \frac{(\text{س}+1-8)}{(\text{س}-7)\left(\sqrt[3]{\text{س}+1}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)} = \lim_{\text{س} \to 7} \frac{\cancel{(\text{س}-7)}}{\cancel{(\text{س}-7)}\left(\sqrt[3]{\text{س}+1}^{\,2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)} = \frac{1}{4+4+4}$

$= \frac{1}{12}$

٣) $$\lim_{س\to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٢٥}-٣}{س^{٣}-س^{٢}-٤} \times \frac{\left(\sqrt[٣]{س+٢٥}\right)^{٢}+٣\sqrt[٣]{س+٢٥}+٩}{\left(\sqrt[٣]{س+٢٥}\right)^{٢}+٣\sqrt[٣]{س+٢٥}+٩}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{س+٢٥-٢٧}{\left(س^{٣}-س^{٢}-٤\right)\left(\left(\sqrt[٣]{س+٢٥}\right)^{٢}+٣\sqrt[٣]{س+٢٥}+٩\right)}$$

$\boxed{٢}$

$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	ثابت
١	١-	٠	٤-
	٢	٢	٤
١	١	٢	٠
$س^{٢}$	$س$	ثابت	

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)}{(س-٢)\left(س^{٢}+س+٢\right)\left(\left(\sqrt[٣]{س+٢٥}\right)^{٢}+٣\sqrt[٣]{س+٢٥}+٩\right)}$$

$$= \frac{١}{(٤+٤)(٩+٩+٩)} = \frac{١}{٢١٦}.$$

٤) $$\lim_{س\to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س-١}-\sqrt[٣]{٣س-٥}}{س-٢} \times \frac{\left(\left(\sqrt[٣]{س-١}\right)^{٢}+\sqrt[٣]{س-١}\times\sqrt[٣]{٣س-٥}+\left(\sqrt[٣]{٣س-٥}\right)^{٢}\right)}{\left(\left(\sqrt[٣]{س-١}\right)^{٢}+\sqrt[٣]{س-١}\times\sqrt[٣]{٣س-٥}+\left(\sqrt[٣]{٣س-٥}\right)^{٢}\right)}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{(س-١)-(٣س-٥)}{(س-٢)\left(\sqrt[٣]{س-١}^{\,٢}+\sqrt[٣]{س-١}\times\sqrt[٣]{٣س-٥}+\sqrt[٣]{٣س-٥}^{\,٢}\right)}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{\cancel{-٢س+٤}\ -٢}{(\cancel{س-٢})\left(\sqrt[٣]{س-١}^{\,٢}+\sqrt[٣]{س-١}\times\sqrt[٣]{٣س-٥}+\sqrt[٣]{٣س-٥}^{\,٢}\right)} = \frac{-٢}{١+١+١} = \frac{-٢}{٣}$$

٥) $$\lim_{س\to ١} \frac{س-\sqrt{س}}{\sqrt[٣]{س}-١} = \frac{١-١}{١-١} = \frac{٠}{٠}$$

صهيب شقيرات 0788879679

$$\lim_{س\to ١} \frac{س-\sqrt{س}}{\sqrt[٣]{س}-١} \times \frac{س+\sqrt{س}}{س+\sqrt{س}} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}}+\sqrt[٣]{س}+١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}+\sqrt[٣]{س}+١}$$

$$= \lim_{س\to ١} \frac{\left(س^{٢}-س\right)\times\left(\sqrt[٣]{س}^{\,٢}+\sqrt[٣]{س}+١\right)}{(س-١)\left(س+\sqrt{س}\right)} = \lim_{س\to ١} \frac{س\,(\cancel{س-١})\left(\sqrt[٣]{س}^{\,٢}+\sqrt[٣]{س}+١\right)}{(\cancel{س-١})\left(س+\sqrt{س}\right)}$$

$$= \frac{(١+١+١)\times ١}{١+١} = \frac{٣}{٢}.\ \#$$

استخدام مرافق الجذر التكعيبي لثلاثة حدود :-

نجزئ الثلاثة حدود الى حدين فقط ، حيث نجعل الجزء الذي يحوي الجذر حد والباقي حد . مع مراعاة ان تكون كل نهاية بعد الفصل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال (١٢) جد $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{2x+2}-4}{x-3}$

الحل :-

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{2x+2}-(2+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} + \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{2x+2}-2}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} + \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{2x+2}-2}{x-3}\times\frac{(\sqrt[3]{2x+2})^2+2\sqrt[3]{2x+2}+4}{(\sqrt[3]{2x+2})^2+2\sqrt[3]{2x+2}+4}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} + \lim_{x\to 3}\frac{2x+2-8}{(x-3)\left((\sqrt[3]{2x+2})^2+2\sqrt[3]{2x+2}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(\sqrt{x+1}+2)} + \lim_{x\to 3}\frac{2\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})\left((\sqrt[3]{2x+2})^2+2\sqrt[3]{2x+2}+4\right)}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{(\sqrt[3]{8})^2+2\sqrt[3]{8}+4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4+4+4} = \frac{5}{12} \ \#$$

مثال (١٣) جد قيمة النهاية التالية :-

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt{4x+1}-5}{x-2} = \frac{2+3-5}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2+2+\sqrt{4x+1}-5}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} + \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$$

$$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{3س+2} - 2}{س-2} \times \frac{(\sqrt[3]{3س+2})^2 + 2\sqrt[3]{3س+2} + 4}{(\sqrt[3]{3س+2})^2 + 2\sqrt[3]{3س+2} + 4} + \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{\sqrt{4س+1} - 3}{س-2} \times \frac{\sqrt{4س+1}+3}{\sqrt{4س+1}+3}$$

$$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{(3س+2) - 8}{(س-2)\left((\sqrt[3]{3س+2})^2 + 2\sqrt[3]{3س+2} + 4\right)} + \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{4س+1-9}{(س-2)(\sqrt{4س+1}+3)}$$

$$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{3س-6}{(س-2)\left((\sqrt[3]{3س+2})^2 + 2\sqrt[3]{3س+2} + 4\right)} + \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{4س-8}{(س-2)(\sqrt{4س+1}+3)}$$

$$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{3\cancel{(س-2)}}{\cancel{(س-2)}\left((\sqrt[3]{3س+2})^2 + 2\sqrt[3]{3س+2} + 4\right)} + \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{4\cancel{(س-2)}}{\cancel{(س-2)}(\sqrt{4س+1}+3)}$$

$$= \frac{3}{4+4+4} + \frac{4}{3+3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{6} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

ملاحظة نهايات تحتوي جذور تربيعية ولكنها ليس مرافق او تحليل بشكل مباشر :-
نعوض داخل الجذر التربيعي للتأكد ان ناتج التعويض يساوي صفراً ثم ندرس المجال ونجد النهاية من اليمين و اليسار.

مثال (١٤) جد قيمة النهايات الآتية :-

١) $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \sqrt{\frac{س-2}{س^2-4}} = \frac{0}{0}$

الطريقة الأولى :- $= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\cancel{س-2}}{(\cancel{س-2})(س+2)}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

الطريقة الثانية :- $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س^2-4}} = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{0}}$

بما ان ناتج التعويض في احد الجذرين او كليهما صفراً نعود الى قواعد حساب النهايات وذلك من خلال البحث اشارة حول العدد المطلوب ايجاد النهاية عنده والجذر الذي يكون ناتج التعويض داخله صفراً.

$\sqrt{س-2}$ ← $س-2=0$ ⇐ $س=2$

$س-2$: $- - -$ (2) $+ +$

$\sqrt{س^2-4}$ ← $س^2-4$ ⇐ $س^2=4$

$س=\pm 2$

$س^2-4$: $+ + +$ (-2) $- - -$ (2) $+ + +$

جذر المقام له صفران اثنان (2 ، -2) ، لا نبحث اشارة حول (-2) لان المطلوب النهاية عندما س ← 2 فقط نبحث الاشارة حول العدد 2.

$$\underset{س\to 2^+}{نها}\frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س^2-4}}=\underset{س\to 2^+}{نها}\sqrt{\frac{س-2}{س^2-4}}=\underset{س\to 2}{نها}\sqrt{\frac{\cancel{س-2}}{(\cancel{س-2})(س+2)}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\underset{س\to 2^-}{نها}\frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س^2-4}}\ \text{غ.م} \Leftarrow \therefore \underset{س\to 2}{نها}\frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س^2-4}}\ \text{غ.م}$$

مثال (15) جد : 1- $\underset{س\to 9}{نها}\dfrac{\sqrt{س}-3}{\sqrt{س-9}}=\dfrac{0}{0}$

$\sqrt{س-9}$ ← $س-9 \geq 0$

$س-9=0$

$س=9$

$- - -$ (9) $+ + +$

$$=\underset{س\to 9^+}{نها}\frac{\sqrt{س}-3}{\sqrt{س-9}}\times\frac{\sqrt{س}+3}{\sqrt{س}+3}$$

$$=\frac{1}{6}\times\underset{س\to 9^+}{نها}\frac{س-9}{\sqrt{س-9}}=\frac{1}{6}\underset{س\to 9^+}{نها}\frac{\sqrt{س-9}\ \sqrt{س-9}}{\sqrt{س-9}}=\frac{0}{6}=\text{صفر}$$

$$\underset{س\to 9^-}{نها}\frac{\sqrt{س}-3}{\sqrt{س-9}}\ \text{غ.م} \Leftarrow \therefore \underset{س\to 9}{نها}\frac{\sqrt{س}-3}{\sqrt{س-9}}\ \text{غ.م}$$

2- $\underset{س\to 1^-}{نها}\dfrac{\sqrt{1-س^2}-\sqrt{1-س}}{\sqrt{1-س}}$ ندرس المجال لان ناتج التعويض داخل الجذر سالب

$1-س^2=0$ ⇐ $س=\pm 1$

$1-س=0$ ⇐ $س=1$

$1-س^2$: $- -$ (-1) $+ +$ (1) $- -$

$1-س$: $+ + +$ (1) $- - -$

$$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١-س^٢}-\sqrt{١-س}}{\sqrt{١-س}} = \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١-س^٢}}{\sqrt{١-س}} - \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \frac{\cancel{\sqrt{١-س}}}{\cancel{\sqrt{١-س}}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(١-س)(١+س)}}{\sqrt{١-س}} - ١ = \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \frac{\cancel{\sqrt{١-س}}\,\sqrt{١+س}}{\cancel{\sqrt{١-س}}} - ١ = \sqrt{٢} - ١ \ \#.$$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \frac{س-٢}{\sqrt{س-٢}} = \frac{٠}{\sqrt{٠}}$ ← ندرس مجالة.

$س-٢=٠ \Leftarrow س=٢$ صفر مقام

--- ٢ +++

$$\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-٢}\,\cancel{\sqrt{س-٢}}}{\cancel{\sqrt{س-٢}}} = \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \sqrt{س-٢} = \text{صفر}$$

٤) $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^٢-٦س+٥}}{\sqrt{١-س^٢}} = \frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$ ندرس مجال كل جذر

جذر البسط: +++ ١ --- ٥ +++

$$= \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(س-١)(س-٥)}}{\sqrt{(١+س)(١-س)}} = \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\cancel{(١-س)}(٥-س)}{(١+س)\cancel{(١-س)}}}$$

جذر المقام: --- -١ +++ ١ ---

$$= \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \sqrt{\frac{(٥-س)}{(١+س)}} = \frac{\sqrt{٥-١}}{\sqrt{١+١}} = \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{\cancel{٢}} = \sqrt{٢}$$

ملاحظة

$\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$ بشرط : $أ>٠$ ، $ب>٠$

$س = \sqrt{س}\,\sqrt{س}$ بشرط $س>٠$

مثال (١٦) جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{٤+س}-٢}$

$س=٠$

--- ٠ +++

$$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{٤+س}-٢} \times \frac{\sqrt{٤+س}+٢}{\sqrt{٤+س}+٢} = ٤ \times \underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س}}{\cancel{٤}+س-\cancel{٤}} = ٤ \times \underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س}}{\cancel{س}} = ٤$$

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{٤+س}-٢}$ غ.م $\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{٤+س}-٢}$ غ.م

الطرح والاضافة :-

أنواع الطرح والاضافة :-

- طرح واضافه ثابت (الفصل)
- طرح واضافه متغير (فصل ثم اخراج عامل مشترك).

توضيح : ١- طرح واضافه ثابت

يتم استخدامها اذا كان في البسط احد الاشكال الاتية :-

١- قوس مع اكثر من حد ٢- جذر وقوس وعدد ٣- جذر مع اكثر من حد

٤- جذر وقوس ٥- جذرين وعدد ٦- قوس لا تريد فكه.

٧- قوسين مختلفين. ٨- جذرين مختلفين.

٢- طرح واضافه متغير

نستخدم اذا كان لدينا في البسط ضرب اقترانين :-

ملاحظات :-

١- ونطرح ونضيف حسب ناتج التعويض في الحد الاول فقط.

٢- يتم الطرح والاضافة بعد الحد الأول مباشرة.

٣- آلية الفصل في الطرح والاضافه ← نها $\left(\frac{\text{الحد الاول مع المطروح}}{\text{المقام}} \right)$ + نها $\frac{\text{مجموع الباقي مع بسط}}{\text{المقام}}$

٤- عندما يكون الحد الأول حاصل ضرب مقدارين يتم تعويض في احدهما ويترك الآخر بدون تعويض.

طرح واضافة ثابت :-

مثال (١٧) جد قيمة كل من النهايات التالية :-

١) $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 + \sqrt[3]{س} - 2}{س - 1}$

بما ان ناتج تعويض $س^2$ هو ١ لذلك نطرح ونضيف ١ وايضا ناتج تعويض $\sqrt[3]{س}$ هو ١ لذلك نطرح ونضيف ١.

٦٠

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2 - 1 + 1 + \sqrt[3]{\text{س}} - 1 + 1 - 2}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2 - 1 + \sqrt[3]{\text{س}} - 1 + \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{2}}{\text{س} - 1}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1} + \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\cancel{\text{س} - 1})(\text{س} + 1)}{(\cancel{\text{س} - 1})} + \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{\text{س}^2} + \sqrt[3]{\text{س}} + 1}{\sqrt[3]{\text{س}^2} + \sqrt[3]{\text{س}} + 1}$$

$$= 2 + \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 1)(\sqrt[3]{\text{س}^2} + \sqrt[3]{\text{س}} + 1)} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

2) $$\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 9} + \sqrt[3]{2\text{س}} - 7}{\text{س} - 4}$$

بما ان ناتج تعويض $\sqrt{\text{س} + 9}$ هو ٥ لذلك نطرح ونضيف ٥ وايضا ناتج تعويض $\sqrt[3]{2\text{س}}$ هو ٢ لذلك نطرح ونضيف ٢.

نضرب كل نهاية بالمرافق الخاص بها.

$$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 9} - 5 + \cancel{5} + \sqrt[3]{2\text{س}} - 2 + \cancel{2} - \cancel{7}}{\text{س} - 4} = \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 9} - 5}{\text{س} - 4} + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt[3]{2\text{س}} - 2}{\text{س} - 4}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 9} - 5}{\text{س} - 4} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 9} + 5}{\sqrt{\text{س}^2 + 9} + 5} + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt[3]{2\text{س}} - 2}{\text{س} - 4} \times \frac{\sqrt[3]{(2\text{س})^2} + 2\sqrt[3]{2\text{س}} + 4}{\sqrt[3]{(2\text{س})^2} + 2\sqrt[3]{2\text{س}} + 4}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\overbrace{\text{س}^2 + 9 - 25}^{\text{س}^2 - 16}}{(\text{س} - 4)(\sqrt{\text{س}^2 + 9} + 5)} + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\overbrace{2\text{س} - 8}^{2(\text{س} - 4)}}{(\text{س} - 4)(\sqrt[3]{(2\text{س})^2} + 2\sqrt[3]{2\text{س}} + 4)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{(\cancel{\text{س} - 4})(\text{س} + 4)}{(\cancel{\text{س} - 4})(\sqrt{\text{س}^2 + 9} + 5)} + \lim_{\text{س}\to 4} \frac{2(\cancel{\text{س} - 4})}{(\cancel{\text{س} - 4})(\sqrt[3]{(2\text{س})^2} + 2\sqrt[3]{2\text{س}} + 4)}$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{2}{12} = \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{24 + 5}{30} = \frac{29}{30} \ \#$$

٣) $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\sqrt{س+١} + س^٢ + س - ١٤}{س - ٣}$

نجمع ونطرح ٢.

$= \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢ + ٢ + س^٢ + س - ١٤}{س-٣} = \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢}{س-٣} + \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ + س - ١٢}{س-٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢}{س-٣} \times \dfrac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢} + \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\cancel{(س-٣)}(س+٤)}{\cancel{(س-٣)}}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{\overset{\cancel{(س-٣)}}{س+١-٤}}{\cancel{(س-٣)}(\sqrt{س+١}+٢)} + \lim\limits_{س \to ٣} (س+٤) = \dfrac{١}{٤} + \dfrac{٧\times٤}{١\times٤} = \dfrac{٢٩}{٤}$

طرح واضافة متغير:-

مثال (١٨) جد $\lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{س\sqrt[٣]{س} - ١٦}{(س-٨)}$

الحد الاول حاصل ضرب اقترانين ، نعوض $س \leftarrow ٨$ ، في احد المتغيرين فقط والاخر يترك بدون تعويض.

الحل :- $= \lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{س\sqrt[٣]{س} - ٢س + ٢س - ١٦}{(س-٨)}$

عندما $س \leftarrow ٨ \Leftarrow س\sqrt[٣]{٨} = ٢س$

$س - (٢)^٣ = (\sqrt[٣]{س} - ٢)((\sqrt[٣]{س})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)$

$= \underbrace{\lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{س\sqrt[٣]{س} - ٢س}{س-٨}}_{أ} + \underbrace{\lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{٢س - ١٦}{س-٨}}_{ب}$

$أ = \lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{س(\sqrt[٣]{س} - ٢)}{(\sqrt[٣]{س} - ٢)((\sqrt[٣]{س})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)} = \dfrac{٨}{١٢} = \dfrac{٢}{٣}$

$ب = \lim\limits_{س \to ٨} \dfrac{٢\cancel{(س-٨)}}{\cancel{(س-٨)}} = ٢$

$أ + ب = \dfrac{٢}{٣} + ٢ = \dfrac{٨}{٣}$

ملاحظات

① يتم استخدام طريقة جمع واضافة متغير عندما يكون في البسط اقترانين مضروبات ببعضهم .

② بعد الطرح والاضافة نحصل على فصل الاقترانين الى نهايتين ونحصل على اخراج عامل مشترك .

في مثل هذه الحالة بحاجة الى عملية طرح واضافة مقدار وهذا المقدار يكون بأن نفوض قيمة س في احد الحدين ونترك الاخر

$(س+1)^3\sqrt{س}$

$(س+1)^3\sqrt{1}$ أو $(1+1)^3\sqrt{س} \to 8\sqrt{س}$

٢) $\lim_{س\to1} \dfrac{(س+1)^3\sqrt{س}-8}{س-1}$

نطرح ونضيف $8\sqrt{س}$

$\lim_{س\to1} \dfrac{(س+1)^3\sqrt{س} - 8\sqrt{س} + 8\sqrt{س} - 8}{س-1}$

$= \lim_{س\to1} \dfrac{(س+1)^3\sqrt{س} - 8\sqrt{س}}{س-1} + \lim_{س\to1} \dfrac{8\sqrt{س}-8}{س-1}$

$= \lim_{س\to1} \dfrac{\sqrt{س}\left((س+1)^3-8\right)}{س-1} + \lim_{س\to1} \dfrac{8(\sqrt{س}-1)}{س-1} \times \dfrac{\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}+1}$

$= \lim_{س\to1} \dfrac{\sqrt{س}\,(\cancel{س+1-2})\left((س+1)^2+2(س+1)+4\right)}{\cancel{س-1}} + \lim_{س\to1} \dfrac{8(\cancel{س-1})}{(\cancel{س-1})(\sqrt{س}+1)}$

$= 1\,(4+4+4) + \dfrac{8}{2} = 12+4 = 16$

٣) $\lim_{س\to2} \dfrac{س^2\sqrt{س+2} - 8}{س-2}$ نطرح ونضيف $(2)^2\sqrt{س+2} = 4\sqrt{س+2}$.

$= \lim_{س\to2} \dfrac{س^2\sqrt{س+2} - 4\sqrt{س+2} + 4\sqrt{س+2} - 8}{س-2}$

$= \lim_{س\to2} \dfrac{س^2\sqrt{س+2} - 4\sqrt{س+2}}{س-2} + \lim_{س\to2} \dfrac{4\sqrt{س+2} - 8}{س-2}$

$= \lim_{س\to2} \dfrac{\sqrt{س+2}\,(س^2-4)}{س-2} + \lim_{س\to2} \dfrac{4\left(\sqrt{س+2}-2\right)}{س-2} \times \dfrac{\sqrt{س+2}+2}{\sqrt{س+2}+2}$

$= \lim_{س\to2} \dfrac{\sqrt{س+2}\,(\cancel{س-2})(س+2)}{\cancel{س-2}} + \lim_{س\to2} \dfrac{4\times\left(\cancel{(س+2)-(2)^2}\right)}{(\cancel{س-2})\left(\sqrt{س+2}+2\right)}$

$= 2\times4 + \dfrac{4}{4} = 8+1 = 9$ #

ملاحظة في حال وجود حاصل ضرب اقترانين في المقام في هذه الحالة لا يجوز الطرح والإضافة لأن المقام لا يوزع على البسط ، لذلك نقسم البسط والمقام على (س - م) ثم نوزع النهاية على البسط والمقام.

مثال (١٩) جد :-

١) $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س - ١}{س\sqrt{س+٣} - ٥س + ٣}$ نقسم على (س - ١).

$$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{س-١}{س-١}}{\dfrac{س\sqrt{س+٣} - ٥س+٣}{س-١}} = \dfrac{\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س-١}{س-١}}{\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{س+٣} - ٥س+٣}{س-١}}$$

نهاية البسط :- $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س-١}{س-١} = ١$

نهاية المقام :- $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{س+٣} - ٥س+٣}{س-١}$ نجمع ونطرح ٢س .

$$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{س+٣} - ٢س + ٢س - ٥س + ٣}{س-١}$$

$$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{س+٣} - ٢س}{س-١} + \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\overset{-٣\cancel{(س-١)}}{-٣س+٣}}{\cancel{س-١}}$$

$$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س(\sqrt{س+٣} - ٢)}{س-١} \times \dfrac{\sqrt{س+٣}+٢}{\sqrt{س+٣}+٢} - ٣$$

$$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س((س+٣)-٤)}{(س-١)(\sqrt{س+٣}+٢)} - ٣$$

$$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\cancel{(س-١)}}{(\sqrt{س+٣}+٢)\cancel{(س-١)}} - ٣ = \dfrac{١}{٤} - \dfrac{٣}{١} = \dfrac{-١١}{٤}$$

$$\Leftarrow \dfrac{\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س-١}{س-١}}{\underset{س\to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{س+٣} - ٥س+٣}{س-١}} = \dfrac{١}{\frac{-١١}{٤}} = \dfrac{-٤}{١١} \; . \; \#$$

٢) $\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{س-4}{\sqrt{س+5}-\sqrt[3]{8س-5}}$ نقسم كل من البسط والمقام على $(س-4)$.

$$\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{(س-4)}{(س-4)} \to أ}{\dfrac{\left(\sqrt{س+5}-\sqrt[3]{8س-5}\right)}{(س-4)} \to ب} \quad ، \quad \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{(س-4)}{(س-4)} = 1 = أ$$

$ب = \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+5}-\sqrt[3]{8س-5}}{س-4}$ نطرح ونضيف عندما $س \to 4$ ، $\sqrt{س+5} = \underline{\underline{3}}$ نطرح ونضيف ٣

$$= \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+5}-3+3-\sqrt[3]{8س-5}}{س-4} = \underbrace{\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+5}-3}{س-4}}_{ج} + \underbrace{\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{3-\sqrt[3]{8س-5}}{س-4}}_{د}$$

$$ج = \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+5}-3}{س-4} \times \dfrac{\sqrt{س+5}+3}{\sqrt{س+5}+3} = \dfrac{1}{6} \underset{س\to 3}{\text{نها}} \dfrac{(س+\cancel{5}-9)}{\cancel{(س-4)}} = \dfrac{1}{6}$$

$$د = \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{3-\sqrt[3]{8س-5}}{س-4} \times \dfrac{\left(9+3\sqrt[3]{8س-5}+\left(\sqrt[3]{8س-5}\right)^2\right)}{\left(9+3\sqrt[3]{8س-5}+\left(\sqrt[3]{8س-5}\right)^2\right)}$$

$$= \dfrac{1}{27} \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\left(9-\cancel{8س}^{\,-8}+5\right)}{\cancel{س-4}} = \dfrac{-8}{27}$$

$$ب = ج + د = \dfrac{1}{6} + \dfrac{-8}{27} = \dfrac{-7}{54}$$

$$\therefore \dfrac{\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{(س-4)}{(س-4)}}{\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\left(\sqrt{س+5}-\sqrt[3]{8س-5}\right)}{(س-4)}} = \dfrac{أ}{ب} = \dfrac{1}{\dfrac{-7}{54}} = -\dfrac{54}{7} \ . \#$$

تدريب : جد كل مما يلي :-

١) $\underset{س\to 2}{\text{نها}} \dfrac{س^2-4}{(س-3)\left(\sqrt{2س+5}+3\right)}$

٢) $\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{س-1}{(س+1)\left(\sqrt[3]{س}-2\right)}$

مثال (٢٠) جد : $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \sqrt{\text{س}+١} - ٧}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}$

نقسم كل من الطرفين على (س-٣) ونجد نهاية البسط ونهاية المقام كلاً على حدة ثم نقسم ناتج النهايتين.

الحل :-

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{س}^٢ - \sqrt{\text{س}+١} - ٧}{\text{س} - ٣}}{\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣}}$$

نهاية البسط :-

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \sqrt{\text{س}+١} - ٧}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩ + \cancel{٩} + ٢ - \cancel{٢} - \sqrt{\text{س}+١} - \cancel{٧}}{\text{س} - ٣}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - \sqrt{\text{س}+١}}{\text{س} - ٣} \times \dfrac{٢ + \sqrt{\text{س}+١}}{٢ + \sqrt{\text{س}+١}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)} + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - \overset{-١}{\cancel{(\text{س} + ١)}}}{(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)\,\cancel{(\text{س} - ٣)}} = ٦ + \dfrac{-١}{٤} = \dfrac{٢٣}{٤}$$

نهاية المقام :

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{(\text{س} - ٣)}} = ٥$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \sqrt{\text{س}+١} - ٧}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦} = \dfrac{\frac{٢٣}{٤}}{٥} = \dfrac{٢٣}{٢٠} \;\#$$

تدريب :- $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - \sqrt{\text{س}+١} - ٧}$

الناتج النهائي = $\dfrac{٢٠}{٢٣}$

الفرض والاستبدال :-

١- اذا كان هنالك جذر واحد فقط ويفضل ان يكون الكسر الاخر خطي.
٢- ان يكون هنالك اكثر من جذر ولكن ما داخل الجذر مقادير متساوية بمعنى تشابه محتوى الجذور.
٣- اذا تعددت الاقواس وتشابه المحتوى. ٤- الاقترانات الأسية.

حالة (1) اذا كان هنالك جذر واحد فقط ويفضل ان يكون الكسر الخطي نفرض ص = كامل الجذر ونجعل س موضوع القانون.

مثال (21) جد قيمة كل من النهايات التالية :-

1- $\underset{\text{س}\to 8}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\sqrt[3]{\text{س}} - 16}{\text{س} - 8}$

نفرض انه $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{ص}^3 = \text{س}$ ، $\text{س} \to 8$ ، $\text{ص} \to 2$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}^3 \times \text{ص} - 16}{\text{ص}^3 - 8} = \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}^4 - 16}{\text{ص}^3 - 8}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ص}^2 - 4)(\text{ص}^2 + 4)}{\text{ص}^3 - 8} = \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ص} - 2)}(\text{ص} + 2)(\text{ص}^2 + 4)}{\cancel{(\text{ص} - 2)}(\text{ص}^2 + 2\text{ص} + 4)} = \dfrac{4 \times 8}{4 + 4 + 4} = \dfrac{8}{3}$

2- $\underset{\text{س}\to 8}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}} + 8}{\text{س} - 8}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{س} = \text{ص}^3$ ، $\text{س} \to 8$ ، $\text{ص} \to 2$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}^3 - \text{ص}^3 \times \text{ص} + 8}{\text{ص}^3 - 8}$

ص^4	ص^3	ص^2	ص	ج
1-	1	.	.	8
	+	+	+	+
↓	2-	2-	4-	8-
1-	1-	2-	4-	.

$\boxed{2}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ص} - 2)}(-\text{ص}^3 - \text{ص}^2 - 2\text{ص} - 4)}{\cancel{(\text{ص} - 2)}(\text{ص}^2 + 2\text{ص} + 4)}$

$= \dfrac{-5}{3}$

3- $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[4]{\text{س} + 13} - 2}{\text{س} - 3}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt[4]{\text{س} + 13}$ ، $\text{ص}^4 = \text{س} + 13$ ، $\text{س} = \text{ص}^4 - 13$ ، $\text{س} \to 3$ ، $\text{ص} \to 2$

$\underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص} - 2}{\text{ص}^4 - 13 - 3} = \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص} - 2}{\text{ص}^4 - 16}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص} - 2}{(\text{ص}^2 - 4)(\text{ص}^2 + 4)} = \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{ص} - 2}}{\cancel{(\text{ص} - 2)}(\text{ص} + 2)(\text{ص}^2 + 4)} = \dfrac{1}{(2+2)(4+4)}$

$= \dfrac{1}{32}$

٤- $\lim_{س \to 4} \dfrac{س - 5\sqrt{س} + 6}{\sqrt{س} - 2}$

نفرض انه $ص = \sqrt{س}$ ، $س = ص^2$ ، $س \to 4$ ، $ص \to 2$

$= \lim_{ص \to 2} \dfrac{ص^2 - 5ص + 6}{ص - 2} = \lim_{ص \to 2} \dfrac{(ص-3)\cancel{(ص-2)}}{\cancel{(ص-2)}} = 2 - 3 = -1$ #

تدريب :- جد :-

1) $\lim_{س \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{س^2} - 1}{\sqrt[3]{س^5} - 1}$ الجواب : $\dfrac{2}{5}$

2) $\lim_{س \to 3} \dfrac{س - 4}{س - \sqrt[3]{س^2 + 5} - 1}$ الجواب : $\dfrac{12}{11}$

حالة (٢): ان يكون هنالك اكثر من جذر لكن ما داخل الجذر مقادير متساوية بمعنى أكثر من جذر والمحتوى متشابه.

نفرض $ص^ن = س$ حيث ن : المضاعف المشترك الاصغر (اصغر عدد يقبل القسمة عليهم).

مثال (٣٢): جد :-

1) $\lim_{س \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{س} - 1}{\sqrt[5]{س} - 1}$

نفرض انه $ص^{20} = س$ ($س \to 1$ ، $ص \to 1$)

$= \lim_{ص \to 1} \dfrac{(ص^{20})^{\frac{1}{4}} - 1}{(ص^{20})^{\frac{1}{5}} - 1} = \lim_{ص \to 1} \dfrac{ص^5 - 1}{ص^4 - 1} = \lim_{ص \to 1} \dfrac{\cancel{(ص-1)}(ص^4 + ص^3 + ص^2 + ص + 1)}{\cancel{(ص-1)}(ص^3 + ص^2 + ص + 1)} = \dfrac{5}{4}$

2) $\lim_{س \to 1} \dfrac{(\sqrt{س} + \sqrt[3]{س})^3 - 8}{س - 1}$

نفرض انه $ص^6 = س$ ، $س \to 1$ ، $ص \to 1$

$= \lim_{ص \to 1} \dfrac{(ص^3 + ص^2)^3 - 8}{ص^6 - 1} = \lim_{ص \to 1} \dfrac{((ص^3 + ص^2) - 2)((ص^3 + ص^2)^2 + 2(ص^3 + ص^2) + 4)}{(ص - 1)(ص^5 + ص^4 + ص^3 + ص^2 + ص + 1)}$

$= \dfrac{12}{6} \lim_{ص \to 1} \dfrac{ص^3 + ص^2 - 2}{ص - 1}$

$= 2 \lim_{ص \to 1} \dfrac{\cancel{(ص-1)}(ص^2 + 2ص + 2)}{\cancel{(ص-1)}} = 2(1 + 2 + 2)$

$= 2 \times 5$

$= 10$

$ص^3 + ص^2 - 2$

$\boxed{1}$	$ص^3$	$ص^2$	$ص$	ج
	1	1	0	−2
		+ 1	+ 2	+ 2
	1	2	2	0

ملاحظة عندما تتعدد الجذور وتشابه المحتوى نفرض انه ما داخل الجذر $=$ ص^{ن} حيث ن: يقبل القسمة على كل الجذور.

ملاحظة اذا تعددت الجذور وكان ما داخل الجذور متساوي نأخذ الجذر الاكبر و نجد مضاعفاته حتى نجد اول مضاعف يقبل القسمة على جميع الجذور.

مثال (٢٣) جد $\displaystyle \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[3]{س} - 2}{\sqrt[3]{س} - 1}$

نفرض انه ص^6 $=$ س ، س $\to 1$ ، ص $\to 1$

$$= \lim_{ص \to 1} \frac{ص^3 + ص^2 - 2}{ص^2 - 1} = \lim_{ص \to 1} \frac{\cancel{(ص-1)}(ص^2+2ص+2)}{\cancel{(ص-1)}(ص+1)} = \frac{5}{2}.$$

ص^3	ص^2	ص	ثابت
1	1	0	-2
	1	2	2
1	2	2	0
ص^2	ص	ثابت	

$\boxed{1}$

مثال (٢٤) جد $\displaystyle \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - \sqrt[3]{س}}{\sqrt[4]{س} - \sqrt[6]{س}}$

نفرض انه س $=$ ص^{12} ، س $\to 1$ ، ص $\to 1$

$$= \lim_{ص \to 1} \frac{ص^6 - ص^4}{ص^3 - ص^2} = \lim_{ص \to 1} \frac{ص^4 \cancel{(ص-1)}(ص+1)}{ص^2 \cancel{(ص-1)}} = 2$$

مثال (٢٥) جد $\displaystyle \lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{2س-4} - \sqrt[3]{2س-4}}{\sqrt[3]{2س-4} - س + 2}$

ندرس المجال : $2س - 4 = 0$

$س = 2$

$- - -$ $\quad$ 2 $\quad$ $+ + +$

نفرض $\leftarrow$ $2س - 4 =$ ص^{12} ، س $\to 2$ ، ص $\to 0$.

س $= \dfrac{ص^{12} + 4}{2}$

$$\leftarrow = \lim_{ص \to 0^-} \frac{ص^6 - ص^4}{ص^3 - \frac{ص^{12}}{2} \cancel{-2} \cancel{+2}}$$ غ.م

$$\leftarrow = \lim_{ص \to 0^+} \frac{ص^6 - ص^4}{ص^3 - \frac{ص^{12}}{2} \cancel{-2} \cancel{+2}} = \lim_{ص \to 0^+} \frac{\cancel{ص^4}(ص^2 - 1)}{\cancel{ص^3}(1 - \frac{ص^9}{2})} = 0.$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{2س-4} - \sqrt[3]{2س-4}}{\sqrt[3]{2س-4} - س + 2}$$ غ.م.

حالة (٣) اذا تحدوت الاقترانات وكان ما داخلها متساوي ، نفرض ص = ما داخل الجذر

مثال (٢٦) جد $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+2)^3 - (\text{س}+2)^2 - 4}{(\text{س}+2)^2 - 4}$

نفرض أن ص = س + ٢

س ← ٠ ، ص ← ٢

$= \lim\limits_{\text{ص}\to 2} \frac{\text{ص}^3 - \text{ص}^2 - 4}{\text{ص}^2 - 4} = \lim\limits_{\text{ص}\to 2} \frac{(\cancel{\text{ص}-2})(\text{ص}^2+\text{ص}+2)}{(\cancel{\text{ص}-2})(\text{ص}+2)}$

$= \frac{4+2+2}{4} = \frac{8}{4} = 2$ #

$\boxed{2}$

ص³	ص²	ص	ح
1	1−	0	4−
	2+	2+	4+
1	1	2	0
ص²	ص	ثابت	

حالة (٤) الاقتران الاسي :-

مثال (٢٧) جد ناتج :-

١- $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{(64)^{\text{س}} - (8)^{\text{س}}}{1 - (8)^{\text{س}}}$

نفرض ص = $(8)^{\text{س}}$

س ← ٠ ، ص ← ١

$= \lim\limits_{\text{ص}\to 1} \frac{\text{ص}^2 - \text{ص}}{1 - \text{ص}} = \lim\limits_{\text{ص}\to 1} \frac{\text{ص}\,\overset{-1}{(\cancel{\text{ص}-1})}}{(\cancel{1-\text{ص}})} = -1$

٢- $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{(5)^{\text{س}+2} - (5)^{3\text{س}}}{5 - (5)^{\text{س}}}$

نفرض ص = $(5)^{\text{س}}$

س ← ١ ، ص ← ٥

$= \lim\limits_{\text{ص}\to 5} \frac{25\text{ص} - \text{ص}^3}{5 - \text{ص}} = \lim\limits_{\text{ص}\to 5} \frac{\text{ص}(25 - \text{ص}^2)}{5 - \text{ص}}$

$= \lim\limits_{\text{ص}\to 5} \frac{\text{ص}(\cancel{5-\text{ص}})(5+\text{ص})}{(\cancel{5-\text{ص}})} = 5 \times 10 = 50$ #

أسئلة وزارة على التحليل

٢٠٠٨/شتوي :

جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٦س}^{٤} + \text{١٨س}^{٢}}{\text{٢س}^{٢} - \text{٣س}^{٣}}$

أ) −٦ ب) −٢ جـ) ٣ $\boxed{\text{د) ٩}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{٦س}^{٢}}(\text{س}^{٢}+٣)}{\cancel{\text{س}^{٢}}(٢-\text{٣س})} = \dfrac{٣\times ٦}{٢} = \dfrac{١٨}{٢} = ٩$

٢٠١٥/صيفي

جد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^{٢}+٢٧}{\text{س}^{٢}-٩} - \dfrac{\text{س}+٣}{\text{س}-٣} \right)$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^{٢}+٢٧}{\text{س}^{٢}-٩} - \dfrac{(\text{س}+٣)}{(\text{س}-٣)} \times \dfrac{(\text{س}+٣)}{(\text{س}+٣)} \right)$

$(\text{س}+٣)^{٢} = \text{س}^{٢} + ٢\times ٣ \times \text{س} + ٩$
$= \text{س}^{٢} + \text{٦س} + ٩$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+٢٧ - (\text{س}^{٢}+\text{٦س}+٩)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\text{س}^{٢}}+٢٧ - \cancel{\text{س}^{٢}} - \text{٦س} - ٩}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{-\text{٦س} + ١٨}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}$.

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{-٦\cancel{(\text{س}-٣)}}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}+٣)} = \dfrac{-٦}{٦} = -١$

٢٠١٧/صيفي

جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{((\text{س}+١)^{٢}-٤)^{٤}}{(\text{س}^{٢}-\text{٢س}+١)^{٢}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{((\text{س}+١-٢)(\text{س}+١+٢))^{٤}}{((\text{س}-١)(\text{س}-١))^{٢}} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{((\text{س}-١)(\text{س}+٣))^{٤}}{((\text{س}-١)^{٢})^{٢}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)^{٤}}(\text{س}+٣)^{٤}}{\cancel{(\text{س}-١)^{٤}}} = (١+٣)^{٤} = ١٦\times ١٦ = ٢٥٦$.

٢٠١٧ / شتوي

جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٢}{\text{س}^٢ - ٤}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)} = \dfrac{٤ + ١٠ + ٦}{٤} = \dfrac{٢٠}{٤} = ٥$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦ \\
\hline
(\text{س} - ٢) & \text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٢ \\
 & -\ \text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ \\
\hline
 & ٥\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٢ \\
 & -\ ٥\text{س}^٢ - ١٠\text{س} \\
\hline
 & ٦\text{س} - ١٢ \\
 & -\ ٦\text{س} - ١٢ \\
\hline
 & ٠٠
\end{array}
$$

٢٠١٨ / صيفي قديم

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٩^{\text{س}} - ٣^{\text{س}}}{١ - ٣^{\text{س}}}$ تساوي :-

$\boxed{\text{أ) } -١}$ ب) صفر ج) ١ د) غير موجودة

الحل : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(٣)^{٢\text{س}} - ٣^{\text{س}}}{١ - ٣^{\text{س}}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٣^{\text{س}}\cancel{(٣^{\text{س}} - ١)}^{\,-١}}{\cancel{(١ - ٣^{\text{س}})}} = -٣^{٠} = -١$

٢٠١٩ / صيفي (طلاب ٢٠٠٠)

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٣}{٤\text{س}^٣ - ١٣\text{س}^٢ + ٩\text{س}}$

$\text{س}^٣$	$\text{س}^٢$	س	ثابت	
١	٤	−٨	٣	
	١	٥	−٣	١
١	٥	−٣	٠	

$\text{س}^٣$	$\text{س}^٢$	س	ثابت	
٤	−١٣	٩	٠	
	٤	−٩	٠	١
٤	−٩	٠	٠	

الحل :

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٣)}{\cancel{(\text{س} - ١)}(٤\text{س}^٢ - ٩\text{س})} = \dfrac{-٣}{٥}$

أسئلة وزارة على ضرب المرافق

٢٠١٣ / صيفي

جد :

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ٣} - \sqrt{٤\text{س} + ١}}{\text{س} - ٢}$

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\sqrt{3\text{س}+3}-\sqrt{4\text{س}+1}}{\text{س}-2} \times \frac{\sqrt{3\text{س}+3}+\sqrt{4\text{س}+1}}{\sqrt{3\text{س}+3}+\sqrt{4\text{س}+1}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{3\text{س}+3-(4\text{س}+1)}{(\text{س}-2)(\sqrt{3\text{س}+3}+\sqrt{4\text{س}+1})} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{-\cancel{(\text{س}-2)}}{\cancel{(\text{س}-2)}(\sqrt{3\text{س}+3}+\sqrt{4\text{س}+1})} = \frac{-1}{3+3} = \frac{-1}{6}$$

٢٠١٢/شتوي

جد $\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^2-3\text{س}}{\text{س}-\sqrt{\text{س}+1}-1}$.

الحل :-

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^2-3\text{س}}{\sqrt{\text{س}+1}-(\text{س}-1)} = \lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^2-3\text{س}}{\sqrt{\text{س}+1}-(\text{س}-1)} \times \frac{\sqrt{\text{س}+1}+(\text{س}-1)}{\sqrt{\text{س}+1}+(\text{س}-1)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}^2-3\text{س})(2+2)}{(\text{س}+1)-(\text{س}-1)^2} = \lim_{\text{س}\to 3} \frac{4(\text{س}^2-3\text{س})}{\text{س}^2-2\text{س}-\cancel{1}+\text{س}+\cancel{1}} = \lim_{\text{س}\to 3} \frac{4\cancel{(\text{س}^2-3\text{س})}}{\cancel{(3\text{س}-\text{س}^2)}} = -4$$

٢٠١٩/صيفي جديد .

جد $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\sqrt{\text{س}^3-\text{س}}-\sqrt{14-2\text{س}-\text{س}^2}}{\text{س}-2} \times \frac{\sqrt{\text{س}^3-\text{س}}+\sqrt{14-2\text{س}-\text{س}^2}}{\sqrt{\text{س}^3-\text{س}}+\sqrt{14-2\text{س}-\text{س}^2}}$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3-\text{س}-(14-2\text{س}-\text{س}^2)}{(\sqrt{6}+\sqrt{6})(\text{س}-2)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3+2\text{س}^2-\text{س}-14}{(2\sqrt{6})(\text{س}-2)}$$

ثابت	س	س²	س³
١٤-	١-	٢	١
١٤	٨	٢	↓
٠	٧	٤	١

$\boxed{2}$

$$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س}^2+4\text{س}+7)\cancel{(2-\text{س})}}{-(2\sqrt{6})\cancel{(\text{س}-2)}} = \frac{-(4+8+7)}{2\sqrt{6}} = \frac{9}{2\sqrt{6}}$$

٢٠١٩/صيفي

جد :

ضرب بالمرافق

$$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{\sqrt{\text{س}+1}+(\text{س}-5)}{\text{س}-3} \times \frac{\sqrt{\text{س}+1}-(\text{س}-5)}{\sqrt{\text{س}+1}-(\text{س}-5)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٥)^{٢} - (س+١)}{س-٣} \times \lim_{س \to ٣} \frac{١}{(س-٥) - \sqrt{س+١}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ١٠س + ٢٥ - س - ١}{س-٣} \times \frac{١}{-٢-٢} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ١١س + ٢٤}{-٤(س-٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٨)\cancel{(س-٣)}}{-٤\cancel{(س-٣)}} = \frac{-٥}{-٤} = \frac{٥}{٤}.$$

٢٠١٤/شتوي. جد $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \frac{س}{٢}} \times \frac{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$

$$= \lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{(٤ - \frac{س}{٢})((\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)} = \lim_{س \to ٨} \frac{(س-٨)}{(٤ - \frac{س}{٢})(٤+٤+٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٨} \frac{\cancel{(س-٨)}\ -١}{\frac{١}{٢}\cancel{(٨-س)} \times (١٢)} = \frac{-١}{٦}$$

٢٠١٦/صيفي : جد :

$$\lim_{س \to -٢٧} \frac{\sqrt{٩-س} - ٦}{٣ + \sqrt[٣]{س}} \times \frac{\sqrt{٩-س} + ٦}{\sqrt{٩-س} + ٦} \times \frac{٩ - ٣\sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}{٩ - ٣\sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}$$

$$= \lim_{س \to -٢٧} \frac{(٩ - س - ٣٦)(٩ - ٣\sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}})}{(٢٧+س)(\sqrt{٩-س} + ٦)} = \lim_{س \to -٢٧} \frac{\cancel{(-٢٧-س)}^{-١} \times (٢٧)}{\cancel{(٢٧+س)} \times (١٢)} = \frac{-٢٧}{١٢}$$

٢٠١٢/شتوي :- جد $\lim_{س \to -٣} \frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

الحل : $\lim_{س \to -٣} \frac{\frac{٣+س}{٣س}}{س^{٢} + ٢س - ٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{\frac{\cancel{٣+س}}{٣س}}{\cancel{(س+٣)}(س-١)}$

$$= \frac{١}{-٣ \times ٣ \times (-٣-١)} = \frac{١}{-٩ \times -٤} = \frac{١}{٣٦}. \#$$

٢٠١٨ / شتوي / قديم . جد $\lim_{س \to 2} \dfrac{\dfrac{1}{س^2} - \dfrac{1}{6س - 8}}{س^3 - 8}$

الحل :-

$\lim_{س \to 2} \dfrac{1 \times (6س - 8) - 1 \times س^2}{س^2 (6س - 8)} \times \dfrac{1}{س^3 - 8}$

$\lim_{س \to 2} \dfrac{6س - 8 - س^2}{(6س - 8) \times س^2} \times \dfrac{1}{(س^3 - 8)}$

$= \lim_{س \to 2} \dfrac{-(س^2 - 6س + 8)}{(6س - 8) \times س^2} \times \dfrac{1}{(س - 2)(س^2 + 2س + 4)}$

$= \lim_{س \to 2} \dfrac{-\cancel{(س - 2)}(س - 4)}{(6س - 8) س^2} \times \dfrac{1}{\cancel{(س - 2)}(س^2 + 2س + 4)} = \dfrac{-(2 - 4)}{4 \times 4 \times 12} = \dfrac{2}{16 \times 12}$

$= \dfrac{2}{192} = \dfrac{1}{96}$

٢٠١٩ / صيفي / قديم . جد $\lim_{س \to 1} \left(\dfrac{4}{س + 5} - \dfrac{2}{س + 2} \right) \left(\dfrac{1}{س^2 + 3س - 4} \right)$

الحل :-

$\lim_{س \to 1} \dfrac{4(س + 2) - 2(س + 5)}{(س + 5)(س + 2)} \times \dfrac{1}{(س + 4)(س - 1)} =$

$\lim_{س \to 1} \dfrac{4س + 8 - 2س - 10}{(س + 5)(س + 2)} \times \dfrac{1}{(س + 4)(س - 1)} = \lim_{س \to 1} \dfrac{2س - 2}{(س + 5)(س + 2)} \times \dfrac{1}{(س + 4)(س - 1)}$

$= \lim_{س \to 1} \dfrac{2 \cancel{(س - 1)}}{(س + 5)(س + 2)} \times \dfrac{1}{(س + 4)\cancel{(س - 1)}} = \dfrac{2}{6 \times 3 \times 5} = \dfrac{1}{9 \times 5} = \dfrac{1}{45}$.

أسئلة وزارة على الطرح والإضافة

٢٠١٩ / شتوي / جديد . جد : $\lim_{س \to 0} \dfrac{(2 + س)^5 - (2 - س)^5}{(2 + س)^4 - (2 - س)^4}$

الحل : $\lim_{س \to 0} \dfrac{\dfrac{(2 + س)^5 - (2 - س)^5}{(2 + س)^5}}{\dfrac{(2 + س)^4 - (2 - س)^4}{(2 + س)^4 (2 + س)}} = \lim_{س \to 0} \dfrac{1 - \left(\dfrac{2 - س}{2 + س} \right)^5}{1 - \left(\dfrac{2 - س}{2 + س} \right)^4} \times \lim_{س \to 0} (2 + س)^3$

$ص = \frac{٢ - س}{س + ٢}$ ، $س \leftarrow ٠$ ، $ص \leftarrow ١$

ثابت	ص	$ص^٢$	$ص^٣$	$ص^٤$	$ص^٥$	
١	٠	٠	٠	٠	−١	$\boxed{١}$
−١	−١	−١	−١	−١		
٠	−١	−١	−١	−١	−١	

$\Leftarrow = \lim_{ص \to ١} \frac{١ - ص^٥}{١ - ص^٤} \times ٨$ بالقسمة التركيبية.

$= \lim_{ص \to ١} \frac{(\cancel{١ - ص})(-١ \times (ص^٤ + ص^٣ + ص^٢ + ص + ١))}{(\cancel{١ - ص})(١ + ص)} = \frac{-٨ \times -١ \times ٥}{٢} = \frac{٤٠}{٢} = ٢٠$

٢٠١٤/شتوي: جد $\lim_{س \to -٢} \frac{٥ - |٣س + ١|}{س^٣ + ٨}$

صهيب شقيرات 0788879679

الحل: $|-٦ + ١| = |-٥| = ٥ \Leftarrow -(٣س + ١)$

$\lim_{س \to -٢} \frac{٥ - (-٣س - ١)}{س^٣ + ٨} = \lim_{س \to -٢} \frac{٥ + ٣س + ١}{س^٣ + ٨} = \lim_{س \to -٢} \frac{٣(س + ٢)}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)} = \frac{٣}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

٢٠١٤/صيفي: جد: $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٣} - ٢|س|}{٢س^٢ - ٥س - ١٢}$

الحل: $|٤^+|$ ⇐ القاعدة تبقى س.

$\Leftarrow \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٣} - ٢س}{٢س^٢ - ٥س - ١٢} \times \frac{\sqrt{س^٣} + ٢س}{\sqrt{س^٣} + ٢س} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٤س^٢}{(٢س + ٣)(س - ٤)(٨ + ٨)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ (\cancel{س - ٤})}{(٢س + ٣)(\cancel{س - ٤})(١٦)} = \frac{\cancel{١٦}}{١١ \times \cancel{١٦}} = \frac{١}{١١}$

٢٠١٣/شتوي: اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{|س - ٣|} & ، س \geq ٣ \\ جـ س^٢ - ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة فجد قيمة الثابت جـ

الحل: $|٣ - ٣| = |٠|$ ← نفيد التعريف

$س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

$س - ٣$: −− ، ++ (حول ٣)

$ق(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{س - ٣} & ، س \geq ٣ \\ جـ س^٢ - ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$

بما ان $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة $\Leftarrow \lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} ق(س)$.

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{٣ - س}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} (جـ س^٢ - ٤)$

$-١ = ٩ جـ - ٤$

$٣ = ٩ جـ \Leftarrow جـ = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$.#

أسئلة وزارة على اقتران العتبة المطلقة واكبر عدد صحيح.

٢٠١٤/شتوي (٥ علامات)

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + \frac{١}{س} + [\frac{س}{٣}] & ، ١ \le س \le ٣ \\ \frac{|س-٣|}{س^٢-٩} & ، ٣ < س < ٤ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س):

الحل: ق(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + \frac{١}{س} + ٠ & ، ١ \le س < ٣ \\ ٢س^٢ + \frac{١}{س} + ١ & ، س = ٣ \\ \frac{س-٣}{س^٢-٩} & ، ٣ < س < ٤ \end{cases}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) $= ٢ \times ٩ + \frac{١}{٣} = ١٨ + \frac{١}{٣} = ١٨\frac{١}{٣}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) $= \lim_{س \to ٣^+} \frac{\cancel{س-٣}}{\cancel{(س-٣)}(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

$\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) $\ne \lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) $\therefore \lim_{س \to ٣}$ ق(س) غ.م.

أسئلة وزارة على ايجاد النهاية مع الجذور

٢٠١٣/صيفي

$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢-٩}}{\sqrt{س-٣}}$ تساوي:

أ) صفر ب) $\sqrt{٦}$ جـ) ٦ $\boxed{\text{د) غير موجودة.}}$

الحل: $س^٢ - ٩ = ٠$ ، $س = ٣ ، -٣$

++ (−٣) −− (٣) ++

$س - ٣$

−− (٣) ++

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢-٩}}{\sqrt{س-٣}}$ غ.م.

كلا الجذرين غير معرفين من يسار ٣.

٢٠١٠/شتوي: إذا كانت ق كثير حدود وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(س)+٥}{س-٣} = ٤$ وكان $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\text{ق}(س) - ٢س + ٣\text{ب}\right) = ٧$ فجد قيمة ب:

الحل: $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \left(\text{ق}(س) + ٥\right) = \text{صفر} \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) = -٥$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \text{ق}(س) - \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} ٢س + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} ٣\text{ب} = ٧$

$-٥ - ٦ + ٣\text{ب} = ٧ \Leftarrow -١١ + ٣\text{ب} = ٧ \Leftarrow \frac{\cancel{٣}\text{ب}}{\cancel{٣}} = \frac{١٨}{٣} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٦}$

٢٠٠٩/صيفي: إذا كانت هـ كثير حدود وكانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}(س)+٥}{س} = \frac{١}{٢}$
وكانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\text{هـ}(س) - ٥ + ٣\text{جـ}\right) = ٢$ فجد قيمة الثابت جـ

الحل: $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\text{هـ}(س) + ٥\right) = \text{صفر} \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{هـ}(س) = -٥$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{هـ}(س) - \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} ٥ + \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} ٣\text{جـ} = ٢$

$-٥ - ٥ + ٣\text{جـ} = ٢ \Leftarrow -١٠ + ٣\text{جـ} = ٢$

$\frac{\cancel{٣}\text{جـ}}{\cancel{٣}} = \frac{١٢}{٣}$

$\boxed{\text{جـ} = ٤}$ #

٢٠٠٩/شتوي: إذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ وكانت $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{\text{ق}(س) - ٦} + \text{ب} = \frac{٣}{٢}$
فجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(س+٣)(س-١)}{\text{ق}(س) - ٦} + \text{ب} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(س-١)}{\text{ق}(س) - ٦} \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} (س+٣) + \text{ب} = \frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow \frac{١}{٨} \times ٤ + \text{ب} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \frac{١}{٢} + \text{ب} = \frac{٣}{٢}$

$\text{ب} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ #

٢٠١٢ / شتوي

اذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{ل(س) - ٤}{س} = ٨$ ، وكان ل(س) اقتران كثير الحدود فإن

$\lim_{س \to ٠} (ل(س) + ١٠) =$

أ) ٤　　$\boxed{\text{ب) ١٤}}$　　جـ) ١٨　　د) ٦

الحل:- $\lim_{س \to ٠} (ل(س) - ٤) = $ صفر ⇐ $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٤$

⇐ $\lim_{س \to ٠} (ل(س) + ١٠) = \lim_{س \to ٠} (ل(س)) + \lim_{س \to ٠} ١٠ = ٤ + ١٠ = ١٤$

٢٠١٢ / صيفي　اذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ + (أ + ١٣)س + أ}{س - ٢}$ حيث س ≠ ٢ جد قيمة أ

التي تجعل $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة .

أ) ٣٠　　ب) -٣٠　　جـ) -١٣　　$\boxed{\text{د) -١٠}}$

الحل :- تكون النهاية موجودة يجب ان يكون $\lim_{س \to ٢} س^٢ + (أ + ١٣)س + أ = $ صفر

$٤ \times (أ + ١٣) \times ٢ + أ = $ صفر　⇐　$٣أ + ٣٠ = $ صفر

$٤ + ٢أ + ٢٦ + أ = ٠$　⇐　$٣أ = -٣٠$ ⇐ $أ = -١٠$

٢٠١٨ / شتوي قديم　اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س - أ} - ٢}{٢س - ٢}$ موجودة فإن قيمة الثابت أ

تساوي :-

أ) ٣　　$\boxed{\text{ب) -٣}}$　　جـ) $\frac{٣}{٢}$　　د) $\frac{-٣}{٢}$

الحل: $\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - أ} - ٢ = $ صفر

$\sqrt{١ - أ}^{\,٢} - ٢ = $ صفر

$\sqrt{١ - أ} = ٢$

$١ - أ = ٤$ ⇐ $أ = -٣$. #

صهيب شقيرات
0788879679
ماستر رياضيات

٢٠١٩/شتوي/قديم

اذا كان $ق(س) = \frac{س^2 + (ك - ٧)س - ك}{س - ٣}$ ، $س \neq ٣$ ، فإن قيمة الثابت ك التي تجعل $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة تساوي :-

أ) $\boxed{٦}$ ب) -٦ ج) ٣ د) -٣

الحل: $\lim_{س \to ٣} \frac{س^2 + (ك - ٧)س - ك}{س - ٣} = عدد \Leftarrow \lim_{س \to ٣} س^2 + (ك - ٧)س - ك = صفر$

$٩ + ٣ك - ٢١ - ك = ٠ ، \Leftarrow ٢ك = ١٢ \leftarrow ك = ٦$ #

٢٠١٨/شتوي

اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أس^2 + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$ فجد قيمة الثابتين أ، ب.

الحل: $\lim_{س \to ١} (أس^2 + ٢ب س + ٢) = صفر$

$أ + ٢ب + ٢ = صفر$

$أ + ٢ب = -٢ \quad ... ①$

$س^2$	س	ثابت
أ	٢ب	٢
٠	أ	أ+٢ب
أ	أ+٢ب	صفر

$\boxed{١}$

$\lim_{س \to ١} (أس + (أ + ٢ب)) = ١$

$أ + أ + ٢ب = ١ \Leftarrow ٢أ + ٢ب = ١ \quad ... ②$

طرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) :-

$أ + ٢ب = -٢$

$- \quad ٢أ + ٢ب = ١$

$-أ = -٣$

$\boxed{أ = ٣}$ #

عوض في أي من المعادلات للحصول على ب :-

عوض في (١) :

$٣ + ٢ب = -٢$

$٢ب = -٥$

$\boxed{ب = \frac{-٥}{٢}}$ #

ورقة عمل على الدرس الثالث : نهايات الاقترانات الكسرية :-

١- جد كل من ما يلي :-

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢}}{٥س}$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٢}}{س-١}$

٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢س-٤}{س^{٢}-٢س}$

٥) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٢}-٩}{س^{٢}+٣س}$

٦) $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \frac{س^{٢}+٣س-١٠}{س+٥}$

٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٣}-٨}{س-٢}$

٨) $\underset{س \to -٤}{\text{نها}} \frac{س^{٣}+٦٤}{س+٤}$

٩) $\underset{س \to ٨}{\text{نها}} \frac{(س+١)^{٢}-٨١}{س-٨}$

١٠) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}+٣س-٤}{س^{٢}-١}$

١١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٦٤)^{س}-(٨)^{س}}{١-(٨)^{س}}$

١٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٤}-٢س^{٢}+١}{س^{٣}-١}$

١٣) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣}-٢٧}{٢س^{٢}+٦س+١٨} &، س \geq ٤ \\ س+٥ &، س < ٤ \end{cases}$

١٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+٦}-٣}{س-٣}$

١٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦}$

١٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢}+١}-\sqrt{١-٢س^{٢}}}{س^{٢}}$

١٧) $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{س-٧}$

١٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٤}+\frac{١}{-٤+س}}{س}$

١٩) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \left(\frac{٢}{س}-\frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^{٢}-٢٥}\right)$.

٢٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س+٢)^{٢}}-\frac{١}{٤}\right)$

٢١) $\underset{س \to -٢^{+}}{\text{نها}} \frac{|س+٢|}{س+٢}$

٢٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢}+٤س+٤}}{س+٢}$

٢٣) $\underset{س \to \frac{٥}{٢}}{\text{نها}} \frac{٢س-[٢س]}{٤س^{٢}-٢٥}$

٢٤) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢}-٤}}{\sqrt{س-٢}}$

٢٥) $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢}-١}}{\sqrt{س-١}}$

٢- اذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ + ٥}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، جد قيم م التي تجعل $\lim_{س \to م}$ ق(س) غير موجودة.

حلول ورقة العمل

صهيب شقيرات 0788879679

١) نها (س→٣) (س² + ١) / نها (س→٣) (س − ٣) = (٩ + ١) / (٣ − ٣) = ١٠ / ٠ غ.م

٢) نها (س→٢) س² / نها (س→٢) ٥س = ٤ / ١٠ = ٢ / ٥

٣) نها (س→١) س² / نها (س→١) (س − ١) = (١)² / (١ − ١) = ١ / ٠ غ.م

٤) نها (س→٢) ٢(س − ٢) / س(س − ٢) = ٢ / ٢ = ١

٥) نها (س→−٣) (س − ٣)(س + ٣) / س(س + ٣) = −٦ / −٣ = ٢

٦) نها (س→−٥) (س + ٥)(س − ٢) / (س + ٥) = نها (س→−٥) (س − ٢)
= −٥ − ٢ = −٧

٧) نها (س→٢) (س − ٢)(س² + ٢س + ٤) / (س − ٢)
= نها (س→٢) س² + ٢س + ٤ = ٤ + ٤ + ٤
= ١٢.

٨) نها (س→−٤) (س + ٤)(س² − ٤س + ١٦) / (س + ٤)
= ١٦ + ١٦ + ١٦ = ٤٨

٩) نها (س→٨) (س + ١ − ٩)(س + ١ + ٩) / (س − ٨) = ١٨

١٠) نها (س→١) (س + (٤س − ٤) / (س² − ١))

(س³ + ٣س − ٤) ÷ (س² − ١) = س
− (س³ − س)
٤س − ٤

= نها (س→١) س + نها (س→١) (٤س − ٤) / (س² − ١)

= نها (س→١) س + نها (س→١) ٤(س − ١) / (س − ١)(س + ١) = ١ + ٤/٢ = ١ + ٢ = ٣

١١) نها (س→٠) ((٨)^−س − (٨^س)^−١) / ((٨^س)^−١ − ١) = نها (س→٠) ((٨)^−س ((٨)^−س ... − ١)) / ((٨^س)^−١ − ١)

= نها (س→٠) − ٨^−س = − ١

١٢) نها (س→١) (س⁴ − ٢س² + ١) / (س³ − ١)

(س⁴ − ٢س² + ١) ÷ (س − ١) = س³ + س² − س − ١
− (س⁴ − س³)
س³ − ٢س² + ١
− (س³ − س²)
− س² + ١
− (− س² + س)
− س + ١
− (− س + ١)
٠٠

س³ − ١ = (س − ١)(س² + س + ١)

نها (س→١) (س − ١)(س³ + س² − س − ١) / (س − ١)(س² + س + ١)

= نها (س→١) (س³ + س² − س − ١) / (س² + س + ١)

= (١ − ١ − ١ + ١) / (١ + ١ + ١) = ٠/٣ = ٠

١٣) بما ان نها (س→ع) ل(س) موجودة ∴ نها (س→ع⁻) ل(س) = نها (س→ع⁺) ل(س)

نها (س→ع⁻) ل(س) = ع + ٥

نها (س→ع⁺) ل(س) = نها (س→ع⁺) (س³ − ٢٧) / (٢س² + ٦س + ١٨)

= نها (س→ع⁺) (س − ٣)(س² + ٣س + ٩) / ٢(س² + ٣س + ٩) = (ع − ٣) / ٢

⇐ ع + ٥ = (ع − ٣) / ٢ ⇐ ٢ع + ١٠ = ع − ٣

$\boxed{ع = -١٣}$

#

١٤) $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+٦}-٣}{س-٣} \times \frac{\sqrt{س+٦}+٣}{\sqrt{س+٦}+٣}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{س+٦-٩}{س-٣} \times \frac{١}{٦}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{س-٣}}{\cancel{س-٣}} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$

---

١٥) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{س-٢}{\sqrt{س+٣٤}-٦} \times \frac{\sqrt{س+٣٤}+٦}{\sqrt{س+٣٤}+٦}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{(س-٢)(٦+٦)}{س+٣٤-٣٦} = \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\cancel{س-٢})(١٢)}{(\cancel{س-٢})}$

$= ١٢$

---

١٦) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^٢+١}-\sqrt{١-٢س^٢}}{س^٢} \times \frac{\sqrt{س^٢+١}+\sqrt{١-٢س^٢}}{\sqrt{س^٢+١}+\sqrt{١-٢س^٢}}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{س^٢+١-(١-٢س^٢)}{س^٢(١+١)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{س^٢+\cancel{١}-\cancel{١}+٢س^٢}{٢س^٢} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{س^٢}}{٢\cancel{س^٢}} = \frac{٣}{٢}$

---

١٧) $\underset{س\to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س+١}-٢}{س-٧} \times \frac{(\sqrt[٣]{س+١})^٢+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤}{(\sqrt[٣]{س+١})^٢+٢\sqrt[٣]{س+١}+٤}$

$= \underset{س\to ٧}{\text{نها}} \frac{س+١-٨}{(س-٧)(٤+٤+٤)} = \underset{س\to ٧}{\text{نها}} \frac{(\cancel{س-٧})}{١٢\times(\cancel{س-٧})}$

$= \frac{١}{١٢}$

---

١٨) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{-\cancel{٤}+\cancel{س}+\cancel{٤}}{٤(-٤+س)} \times \frac{١}{\cancel{س}} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{٤\times-٤}$

$= \frac{-١}{١٦}$

---

١٩) $\underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{٢\times٥-٢\times س}{س+٥} \times \frac{١}{(س-٥)(س+٥)} =$

$\underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{٢(\cancel{٥-س})^{-١}}{س+٥} \times \frac{١}{(س+٥)(\cancel{س-٥})} = \frac{-٢}{(٥+٥)\times٥\times٥}$

$= \frac{-٢}{١٠\times٢٥} = \frac{-٢}{٢٥٠} = \frac{-١}{١٢٥}$

---

٢٠) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س}\left(\frac{١\times٤-١\times(٢+س)^٢}{٤\times(٢+س)^٢}\right) = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س}\times\left(\frac{٤-(٢+س)^٢}{٤\times(٢+س)^٢}\right)$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{٤}-(\cancel{٤}+٤س+س^٢))}{٤\times(٢+س)^٢} \times \frac{١}{س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٤س-س^٢}{٤\times(٢+س)^٢} \times \frac{١}{س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{س}(-٤-س)}{٤\times(٢+س)^٢} \times \frac{١}{\cancel{س}}$

$= \frac{-\cancel{٤}}{٤\times\cancel{٤}} = \frac{-١}{٤}$

---

٢١) $|-٢+٢| = ٠$ ⇐ نعيد التعريف

$س+٢ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

$-\,-\quad|\quad+\,+$

$-(س+٢)\quad -٢\quad س+٢$

$\therefore \underset{س\to -٢^+}{\text{نها}} \frac{س+٢}{س+٢} = ١.$

---

٢٢) $\underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(س+٢)(س+٢)}}{(س+٢)} = \underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(س+٢)^٢}}{س+٢} = \underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{|س+٢|}{س+٢}$

$|-٢+٢| = |٠|$ نعيد التعريف

$س+٢ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

$-\,-\quad|\quad+\,+$

$-(س+٢)\quad -٢\quad س+٢$

$\underset{س\to -٢^+}{\text{نها}} \frac{س+٢}{س+٢} = ١$ ، $\underset{س\to -٢^-}{\text{نها}} \frac{-(س+٢)}{(س+٢)} = -١$

$\therefore \underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^٢+٤س+٤}}{س+٢}$ غ.م

---

٢٣) $[٢\times٢{,}٥] = [٥]$ يجب اعادة التعريف ، ل = $\frac{١}{١٢١}$

$= \frac{١}{٢}$

$٢ \quad ٢{,}٥ \quad ٣$

$٤ \quad ٥$

$[٢س] = \begin{cases} ٤ & ،\ ٢ \le س < ٢{,}٥ \\ ٥ & ،\ ٢{,}٥ \le س < ٣ \end{cases}$

$\underset{س\to ٢{,}٥^-}{\text{نها}} \frac{٢س-٤}{٤س^٢-٢٥} = \frac{٥-٤}{٠} = \frac{١}{٠} \leftarrow$ غ.م

$\underset{س\to ٢{,}٥^+}{\text{نها}} \frac{٢س-٥}{٤س^٢-٢٥} = \underset{س\to ٢{,}٥^+}{\text{نها}} \frac{(\cancel{٢س-٥})}{(\cancel{٢س-٥})(٢س+٥)}$

$= \frac{١}{١٠}$

$\Leftarrow \underset{س\to ٢{,}٥}{\text{نها}} \frac{٢س-[٢س]}{٤س^٢-٢٥}$ غ.م

٢٤) $\lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س^2 - 4}}{\sqrt{س - 2}}$

غير موجودة لأن كلا النهايتين غير معرف من اليسار (٢).

٢٥) $\lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س^2 - 1}}{\sqrt{س - 1}}$

$س^2 - 1 = 0$

$س = \pm 1$

$س - 1 = 0$

$س = 1$

$\Leftarrow \lim_{س \to 1^+} \sqrt{\frac{س^2 - 1}{(س - 1)}} = \lim_{س \to 1^+} \sqrt{\frac{\cancel{(س - 1)}(س + 1)}{\cancel{(س - 1)}}} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ #.

٢٦) $\lim_{س \to أ} \frac{س^2 + 5}{س^2 - 5س + 6}$ غ.م

$\Leftarrow \lim_{س \to أ} س^2 - 5س + 6 = 0$

$أ^2 - 5أ + 6 = 0$

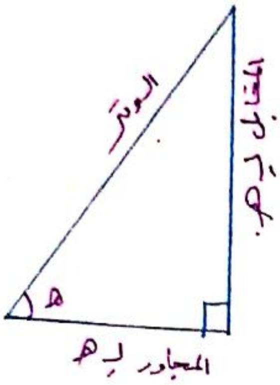
$(أ - 3)(أ - 2) = 0$

$أ = 3$

$أ = 2$

القيم التي تجعل النهاية غير موجودة بمعنى صفر الاقتران للمقام.

الدرس الرابع: نهايات اقترانات مثلثية.



١- النسب المثلثية:

- جاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
- جتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
- ظاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$
- ظتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}}$ = $\frac{1}{\text{ظاهـ}}$
- قاهـ = $\frac{1}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
- قتاهـ = $\frac{1}{\text{جاهـ}}$ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

ملاحظات

١) تقاس الزاوية بوحدتين، هما:
أ- وحدة التقدير الدائري (الراديان).
ب- وحدة التقدير الستيني.

٢) جميع قياسات الزوايا في الثانوية العامة يجب ان تكون في التقدير الدائري.

٣) للزاوية قياسان، هما:
أ- قياس موجب: عكس عقارب الساعة.
ب- قياس سالب: مع عقارب الساعة.

٤) تحويل الزاوية:
- عند تحويل من نظام الدرجات الى النظام الدائري نضرب بـ $\frac{\pi}{180}$

$$\text{هـ}^{د} = \text{هـ}^{\circ} \times \frac{\pi}{180}$$

- عند تحويل من نظام الدائري الى درجات نعوض $\pi = 180$

مثال حول الزوايا التالية من التقدير الستيني (مقاسة بالدرجات) الى تقدير دائري (مقاسة بالراديان)

١) $٢° \Leftarrow$ هـ د $= ٢° \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٩٠}$

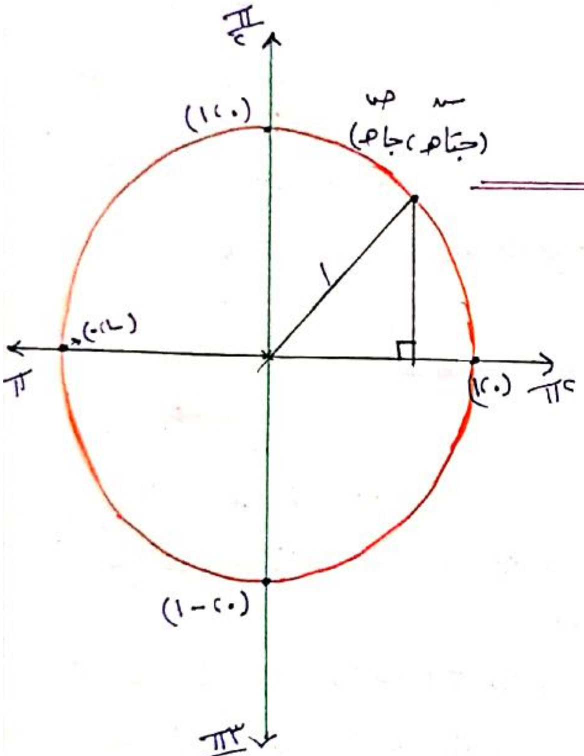
٢) $٣٠° \Leftarrow$ هـ د $= ٣٠° \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٦}$

٣) $٤٥° \Leftarrow$ هـ د $= \frac{\pi}{١٨٠} \times ٤٥ = \frac{\pi}{٤}$

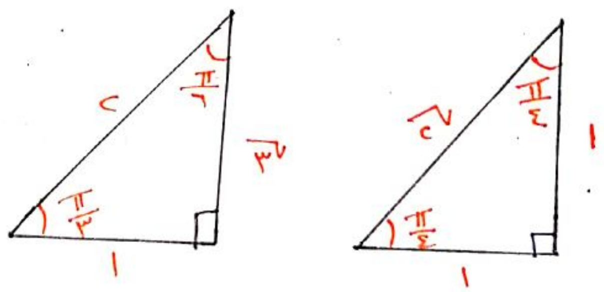
٤) $٦٠° \Leftarrow$ هـ د $= \frac{\pi}{١٨٠} \times ٦٠ = \frac{\pi}{٣}$

٥) $٩٠° \Leftarrow$ هـ د $= \frac{\pi}{١٨٠} \times ٩٠ = \frac{\pi}{٢}$

٦) $١٨٠° \Leftarrow$ هـ د $= \frac{\pi}{١٨٠} \times ١٨٠ = \pi$



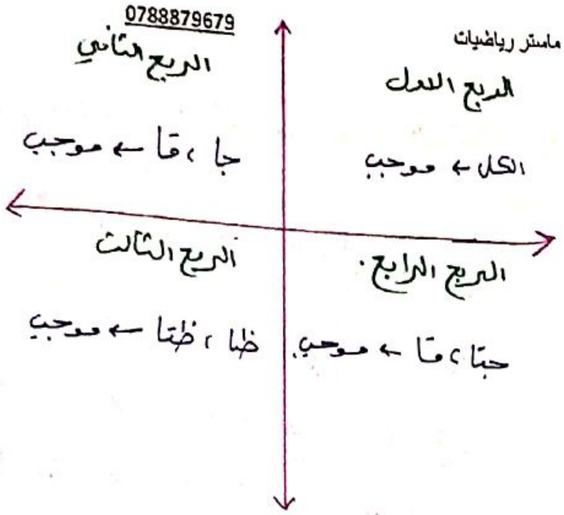
العمل المثلثي \ الزاوية بالدائري	٣٠° $\frac{\pi}{٦}$	٤٥° $\frac{\pi}{٤}$	٦٠° $\frac{\pi}{٣}$
جاهـ	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتاهـ	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$
ظاهـ	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$



(س، ص) في دائرة الوحدة :-

١) جا (٠) = ٠
٢) جتا(٠) = ١
٣) جا ($\frac{\pi}{٢}$) = ١
٤) جتا ($\frac{\pi}{٣}$) = ٠
٥) جا (π) = ٠
٦) جتا (π) = -١
٧) جا ($\frac{٣\pi}{٢}$) = -١
٨) جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$) = ٠
٩) جا (٢π) = ٠
١٠) جتا (٢π) = ١

- الزوايا ضمن الدورة الكاملة :-



⇐ لايجاد النسب المثلثية (جا ، جتا ، ...) نقوم بالتالي :-

مثال :- جتا $\frac{2\pi}{3}$

← جتا $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$2 \times 60 = 120$ ← الربع الثاني ، (جتا ← سالب)

← جتا $\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

شرح المتطابقات

1) متطابقة فيثاغورس :

جا²هـ + جتا²هـ = 1 ، ⇐ 1 + ظا²هـ = قا²هـ ⇐ 1 + ظتا²هـ = قتا²هـ .

1 + ظا² (الزاوية) = قا² (نفس الزاوية) .

2) متطابقات ضعف الزاوية (2س) :

- جا 2س = 2 جاس جتاس .

- جا (الزاوية) = 2 جا (نصف الزاوية) جتا (نصف الزاوية)

- جتا 2س = 2 جتا²س + 1 ← نصف الزاوية .

= 1 - 2 جا²س ← نصف الزاوية

= جتا²س - جا²س ← نصف الزاوية

نصف الزاوية

٣) متطابقات نصف الزاوية ($\frac{س}{٢}$) :-

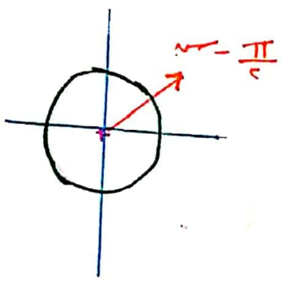
- ١ - جتاس = ٢ جا^{٢}($\frac{س}{٢}$) .
- ١ + جتاس = ٢ جتا^{٢}($\frac{س}{٢}$) .

٤) متطابقات مجموع زاويتين (س ± ص) .

- جا(س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص
يخالف .
- جتا (س ± ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص
يخالف
- ظتا (س ± ص) = $\frac{\text{ظاس} \pm \text{ظاص}}{١ \mp \text{ظاس ظاص}}$ ← البسط يحافظ . ← المقام يخالف .

٥) متطابقات المتممة والمكملة :-

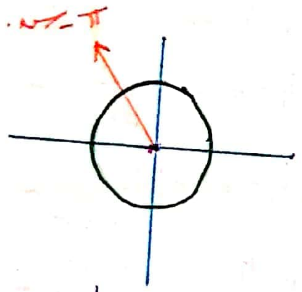
المتممة :-



→

جا($\frac{\pi}{٢}$ - س) = جتاس .
جتا($\frac{\pi}{٢}$ - س) = جاس
ظا($\frac{\pi}{٢}$ - س) = ظتاس .

المكملة :



↓

جا(π - س) = جاس .
جتا(π - س) = - جتاس
ظا(π - س) = - ظاس .

٦) متطابقات مجموع/الفرق بين قتلين :-

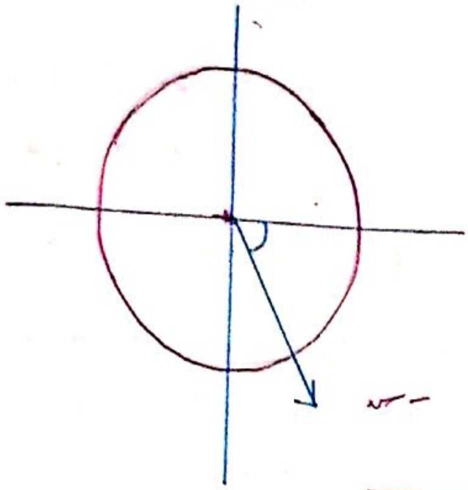
١- جاس - جاص = ٢ جتا($\frac{س+ص}{٢}$) جا($\frac{س-ص}{٢}$) .

٢- جتاس - جتاص = -٢ جا($\frac{س+ص}{٢}$) جا($\frac{س-ص}{٢}$) .

٣- جاس + جاص = ٢ جا($\frac{س+ص}{٢}$) جتا($\frac{س-ص}{٢}$) .

٤- جتاس + جتاص = ٢ جتا($\frac{س+ص}{٢}$) جتا($\frac{س-ص}{٢}$) .

جا (أ + ٢π) = جا أ.



٧) متطابقات سالب الزاوية (-س)

١- جا (-س) = -جا س

٢- جتا (-س) = جتا س

٣- ظا (-س) = -ظا س.

الدرس الرابع:

نهاية الاقترانات الدائرية.

- تعويض مباشر   - تبسيط على المتطابقات   - ضرب المرافق

- طرح واضافة   - المتممة والمكملة.

حالة (١). التعويض المباشرة.

- نها جا س = جا أ
  س←أ

- نها جتا س = جتا أ
  س←أ

- نها ظا س = ظا أ
  س←أ

، أ ∈ ح - [$\frac{ن}{٢}\pi$ ، ن = ±١ ، ن = ±٣ ، ...]

اي انه :- نهاية كل من (جا س ، جتا س ، ظا س) تعويض مباشر على ان لاتكون س صفر للمقام.

مثال (١). جد قيمة كل من النهايات الآتية :-

١) نها (جا س + جتا س) = جا π + جتا π = ٠ + (-١) = -١
س←π

٢) نها (س جا س - جتا ٢س) = $\frac{٣\pi}{٢}$ جا ($\frac{٣\pi}{٢}$) - جتا ($\frac{٢ \times ٣\pi}{٢}$) = $\frac{٣\pi}{٢}$ × -١ + ١ = -١ - $\frac{٣\pi}{٢}$
س←$\frac{٣\pi}{٢}$

٣) نها (ظا س + جا س) = ظا $\frac{\pi}{٤}$ + جا $\frac{\pi}{٤}$ = ١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٢} + ١}{\sqrt{٢}}$
س←$\frac{\pi}{٤}$

نظرية. اذا كان س زاوية مقاسة بالتقدير الدائري ، فإن $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } س}{س} = ١$

خصائص النظرية

١- ناتج التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

٢- س ← ٠ .

٣- النسب المثلثية المتعامل معها هي اما (جا ، ظا) وغير ذلك نحولها.

٤- الزاوية = المقام.

نتيجة :- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{أس}{\text{جا } ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } أس}{\text{جا } ب س} = \frac{أ}{ب}$.

وما ينطبق على جا س ينطبق على ظا س .

نظرية. اذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائري ، فان $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } س}{س} = ١$

نتيجة :-

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{أس}{\text{ظا } ب س} = \frac{أ}{ب}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } أس}{\text{ظا } ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } أس}{\text{ظا } ب س} = \frac{أ}{ب}$

ملاحظة إن أول ما نفكر به في حالة ايجاد النهاية للاقترانات المثلثية هو التعويض المباشر فإذا كان ناتج التعويض على احد الصور الاتية ($\frac{٠}{٠}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ ، $\pm \infty$ ، ٠ ، $\infty \pm \infty$ ، ٠ × ∞) فهنا يجب علينا استخدام المتطابقات او بعض العمليات الحسابية لايجاد حساب النهاية.

مثال (٢) . جد قيمة كلاً من النهايات الاتية :-

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } ٧س}{٦س} = \frac{٧}{٦}$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{ظا } ٩س}{٥س} = \frac{٩}{٥} \times ٣ = \frac{٢٧}{٥}$

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٥س}{٤\text{ظا } ٢س} = \frac{٥}{٢ \times ٤} = \frac{٥}{٨}$

٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ ٣س}{٢س^٢} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } ٣س \times \text{جا } ٣س}{٢س \times س} = \frac{٣}{٢} \times ٣ = \frac{٩}{٢}$

٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} ٣س \text{ ظتا } ٩س = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣س}{\text{ظا } ٩س} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{٣س \text{ قتا } ٥س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } ٥س}{٣س} = \frac{٥}{٣}$

٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{٣س}^2\ \text{قتا٣س ظتا٢س قا٥س} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{٣س}^2 \times \frac{1}{\text{جا٣س}} \times \frac{1}{\text{ظا٢س}} \times \frac{1}{\text{جتا٥س}}$

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٣س}}{\text{جا٣س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا٢س}} \times \frac{1}{\text{جتا٥س}} = \frac{3}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$

$= \frac{1}{2}$.

٨) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^2\text{٣س}}{\text{س}^2} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}\right)^2 = (3)^2 = 9$

٩) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}^2\text{٣س}}{\text{جا٥س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا٣س}}{\text{جا٥س}} \times \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{ظا٣س} = \frac{3}{5} \times \text{صفر} = \text{صفر}$

ملاحظات

١) $\frac{\text{أ}\times\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \frac{\text{ب}}{1}$ أو $\frac{\text{أ}}{1} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

٢) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}\times\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{1}{\text{جـ}}$ أو $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \frac{1}{\text{ب}}$

٣) $\frac{\text{أ}\pm\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \pm \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ (المقام يوزع على البسط لكن العكس لا يجوز)

مثال (٣) جد قيمة النهايات الآتية :-

١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^3}{\text{جا}^2\text{٢س} \times \text{ظا٣س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}}{\text{جا٢س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جا٢س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا٣س}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٣س} - \text{جا٩س} + \text{ظا٢س}}{\text{٢س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٣س}}{\text{٢س}} - \frac{\text{جا٩س}}{\text{٢س}} + \frac{\text{ظا٢س}}{\text{٢س}} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + \frac{2}{2}$

$= \frac{-4}{2} = -2$

٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢س} - \text{جاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\frac{\text{٢س}}{\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right) = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢س}}{\text{س}} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = 2 - 1 = 1$

٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٣س} - \text{جا٥س} + \text{ظا٢س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٣س}}{\text{س}} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}$

$= 3 - 5 + 2 = \text{صفر}$

٥) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢س} + \text{ظا٣س}}{\text{جا٢س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢س}}{\text{جا٢س}} + \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا٣س}}{\text{جا٢س}} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

٦) $\lim_{س\to 0}\frac{س - جا3س + ظاس}{2س - ظا^2س}$ نقسم كل من البسط والمقام على س .

$= \lim_{س\to 0}\frac{\frac{س}{س} - \frac{جا3س}{س} + \frac{ظاس}{س}}{\frac{2س}{س} + \frac{ظا^2س}{س}} = \frac{1-3+1}{2-1\times 0} = \frac{3}{2}$

ملاحظة : في بعض الحالات احتاج قسمة البسط والمقام على (س او س² او س³ ، ...) حتى استطيع استخدام النظريات .

٧) $\lim_{س\to 0}\frac{جا^2 5س}{3س} = \lim_{س\to 0}\frac{جا5س}{3س} \times \lim_{س\to 0} جا5س = \frac{5}{3}\times 0 =$ صفر

٨) $\lim_{س\to 0}\frac{جا2س \times ظا5س}{س^2} = \lim_{س\to 0}\frac{جا2س}{س} \times \frac{ظا5س}{س} = \frac{2}{1}\times\frac{5}{1} = 10$

٩) $\lim_{س\to 0}\frac{س}{جا2س + ظا5س}$ نقسم البسط والمقام على س

$\lim_{س\to 0}\frac{\frac{س}{س}}{\frac{جا2س}{س} + \frac{ظا5س}{س}} = \frac{1}{2+5} = \frac{1}{7}$

١٠) $\lim_{س\to 0}\frac{س جاس}{3س^2 - ظا^2س}$ نقسم كل من البسط والمقام على س²

$\lim_{س\to 0}\frac{\frac{س جاس}{س^2}}{\frac{3س^2}{س^2} - \frac{ظا^2س}{س^2}} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

ملاحظة : في قسمة البسط والمقام على مقدار معين او توزيع المقام على البسط يشترط هنا
ان تكون نهاية كل مقدار موجودة وغير ذلك لا يجوز

مثال (٤) : $\lim_{س\to 0}\frac{1-جتاس}{س^2}$ هنا لا نستطيع توزيع المقام على البسط لأن $\lim_{س\to 0}\frac{1}{س^2}$ غ.م
ولا يجوز قسمة البسط والمقام على س لان $\lim_{س\to 0}\frac{1}{س}$ غ.م .

تذكير هام: نهايات تحتوي على (قا، قتا، ظتا) نستخدم المقلوب، حيث أن:-

$\text{قاس} = \frac{1}{\text{جتاس}}$ ، $\text{قتاس} = \frac{1}{\text{جاس}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{1}{\text{ظاس}}$ ، $\text{جتاس} = \text{جا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})$

مثال (٥) اوجد النهايات التالية:-

١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{س}^2\ \text{ظتا}5\text{س}\ \text{قتاس} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{س}^2 \times \frac{1}{\text{ظا}5\text{س}} \times \frac{1}{\text{جاس}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{ظا}5\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$

$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$.

٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{1 - \text{ظتاس}}{\text{قتاس}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{1 - \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}}{\frac{1}{\text{جاس}}}$ توحيد المقامات.

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{جاس}}}{\frac{1}{\text{جاس}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\cancel{\text{جاس}}} \times \cancel{\text{جاس}} = 0 - 1 = -1$

٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \text{ظا}3\text{س}\ \text{قتا}5\text{س} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}3\text{س}}{\text{جا}5\text{س}} = \frac{3}{5}$

٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظتا}9\text{س}}{\text{قتا}5\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\frac{1}{\text{ظا}9\text{س}}}{\frac{1}{\text{جا}5\text{س}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}5\text{س}}{\text{ظا}9\text{س}} = \frac{5}{9}$.

٥) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ (7\text{س}^3 \times \text{ظتا}^2 2\text{س} \times \text{قتا}5\text{س}) = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ (7\text{س}^3 \times \frac{1}{\text{ظا}^2 2\text{س}} \times \frac{1}{\text{جا}5\text{س}})$

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ (\frac{7\text{س}}{\text{ظا}2\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا}2\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جا}5\text{س}}) = \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$

٦) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}3\text{س} - 5\text{س}}{\text{ظا}7\text{س} - \text{جا}2\text{س}}$ بالقسمة على س.

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}} - \frac{5\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا}7\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}}} = \frac{3-5}{7-2} = \frac{-2}{5}$.

٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{2\text{س}^2 + \text{جا}^2 5\text{س}}{\text{ظا}^2 3\text{س} - \text{جا}^2 2\text{س}}$ بالقسمة على س^2

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\ \frac{\frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2} + \frac{\text{جا}^2 5\text{س}}{\text{س}^2}}{\frac{\text{ظا}^2 3\text{س}}{\text{س}^2} - \frac{\text{جا}^2 2\text{س}}{\text{س}^2}} = \frac{2 + (\frac{\text{جا}5\text{س}}{\text{س}})^2}{(\frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}})^2 - (\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}})^2} = \frac{2+25}{9-4}$

$= \frac{27}{5}$.

س ← س١ ← عدد

ملاحظة: جميع النتائج السابقة يمكن استخدامها اذا كان س ← عدد غير الصفر بشرط ان يكون التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ولكن يجب الاستبدال.

مثال (٦): جد $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جا}(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)}$

نفرض ص = س − ١

عندما س ← ١ ، ص ← ٠

$\lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} = ١$

ملاحظة $\lim \frac{\text{جاهـ}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\lim \frac{\text{ظاهـ}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$

طريقة الحل: ١- نفرض ص = هـ(س)

٢- في حالة $\lim \frac{\text{جاهـ}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$ ، نضرب البسط والمقام في الزاوية هـ(س)

بشرط هـ(س) ← ٠.

$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to} \frac{\text{جاهـ}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})} = \lim_{\text{س}\to} \frac{\text{جاهـ}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} \times \lim_{\text{س}\to} \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$

مثال (٧): جد قيمة النهايات التالية :-

١) $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}(\text{س}-٢)}{\text{س}^٢-٤} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)} \times \frac{١}{٢}$

نفرض ان ص = س − ٢ عندما س ← ٢ ، ص ← ٠.

$\Leftarrow \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}(\text{ص})}{(\text{ص})} \times \frac{١}{٢} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٢) $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}(\text{س}^٢-٤)}{\text{س}-٢} \times \frac{(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}(\text{س}^٢-٤)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} \times (\text{س}+٢)$

$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}(\text{س}^٢-٤)}{(\text{س}^٢-٤)} \times \lim_{\text{س}\to ٢} (\text{س}+٢)$

نفرض ص = س² − ٤ عندما س ← ٢ ، ص ← ٠

$\Leftarrow \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \times ٤ = ٤$.

٣) $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جا}(\text{س}-١)}{\text{س}^٢+\text{س}-٢} = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جا}(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)} = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جا}(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)} \times \lim_{\text{س}\to ١} \frac{١}{\text{س}+٢}$

نفرض ص = س − ١ ، عندما س ← ١ ، ص ← ٠

$\Leftarrow \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \times \frac{١}{٣} = ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$.

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}$

نفرض أن $\text{ص} = \text{س} - \frac{\pi}{2}$ ، عندما $\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{2}$ ، $\text{ص} \leftarrow 0$.

$= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{جا ص}}{-\text{ص}} = -1$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^2 - 4)}{\text{ظا}(\text{س}^3 - 8)} = \dfrac{\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^2-4)}{(\text{س}^2-4)} \times (\text{س}^2-4)}{\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{ظا}(\text{س}^3-8)}{(\text{س}^3-8)} \times (\text{س}^3-8)}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^2 - 4$ ، عندما $\text{س} \leftarrow 2$ ، $\text{ص} \leftarrow 0$.

نفرض $\text{ع} = \text{س}^3 - 8$ ، $\text{س} \leftarrow 2$ ، $\text{ع} \leftarrow 0$.

$\Leftarrow \dfrac{\lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}}}{\lim\limits_{\text{ع} \to 0} \frac{\text{جا ع}}{\text{ع}}} \times \lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س}^3 - 8} = 1 \times \lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)}{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}^2+2\text{س}+4)} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا}(\text{ظا}3\text{س})}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا}(\text{ظا}3\text{س})}{\frac{\text{ظا}3\text{س}}{\text{س}}} \times \text{ظا}3\text{س} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا}(\text{ظا}3\text{س})}{\text{ظا}3\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ظا}3\text{س}}{\text{س}}$

نفرض أن $\text{ص} = \text{ظا}3\text{س}$ ، عندما $\text{س} \leftarrow 0$ ، $\text{ص} \leftarrow 0$.

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \times 3 = 3$

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^3 - 4\text{س} - 15}{\text{ظا}(9 - 3\text{س})} = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{(\text{س}-3)(\text{س}^2+3\text{س}+5)}{\text{ظا} -3(\text{س}-3)}$

	س^3	س^2	س	ثابت
	1	0	−4	−15
$\boxed{3}$		3	9	15
	1	3	5	0
	س^2	س	ثابت	

نفرض $\text{ص} = \text{س} - 3$ عندما $\text{س} \leftarrow 3$ ، $\text{ص} \leftarrow 0$.

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{ص}}{\text{ظا} -3\text{ص}} \times (9+9+5) = \dfrac{23}{-3}$.

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{1}{\text{س}} - 1\right)}{\text{س}^2 - 1} = \lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{1}{\text{س}} - 1\right)}{\text{س}^2\left(1 - \frac{1}{\text{س}^2}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{1}{\text{س}} - 1\right)}{\text{س}^2\left(1 - \frac{1}{\text{س}}\right)\left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)}$

نفرض أن $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} - 1$

عندما $\text{س} \leftarrow 1$ ، $\text{ص} \leftarrow 0$.

$= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{جا ص}}{-\text{ص}} \times \lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{1}{\text{س}^2\left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)} = -1 \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

٩) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}|\text{س}-3|}{\text{س}-3}$

، نفحص تعويض القيمة المطلقة لأن ناتج التعويض داخلها صفر

$- - - \quad 3 \quad + + +$

⇐ $\underset{\text{س}\to 3^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}-3)}{\text{س}-3}$ نفرض ص = س − ٣ ، عندما س ← ٣⁺ ، ص ← ٠⁺

$\underset{\text{ص}\to 0^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاص}}{\text{ص}} = 1$

⇐ $\underset{\text{س}\to 3^{-}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(3-\text{س})}{(\text{س}-3)}$ نفرض ص = ٣ − س ، عندما س ← ٣⁻ ، ص ← ٠⁺

$\underset{\text{ص}\to 0^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاص}}{-\text{ص}} = -1$ ⇐ $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}|\text{س}-3|}{\text{س}-3}$ غ.م

١٠) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}-1}{\text{جا}(\text{س}^3-1)} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}-1}{\dfrac{\text{جا}(\text{س}^3-1)}{\text{س}^3-1}\times(\text{س}^3-1)} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^3-1)}{\text{جا}(\text{س}^3-1)} \times \dfrac{(\text{س}-1)}{\text{س}^3-1}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^3-1)}{\text{جا}(\text{س}^3-1)} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}-1}{(\text{س}^3-1)}$ نفرض ص = س³ − ١ ، عندما س ← ١ ، ص ← ٠.

⇐ $\underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}}{\text{جاص}} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س}-1})}{(\cancel{\text{س}-1})(\text{س}^2+\text{س}+1)} = 1\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

١١) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\sqrt{\text{س}}-1)}{\text{س}^3-1} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\sqrt{\text{س}}-1)}{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\sqrt{\text{س}}-1)}{(\sqrt{\text{س}}-1)(\sqrt{\text{س}}+1)(\text{س}^2+\text{س}+1)}$

نفرض أنه ص = √س − ١ عندما س ← ١ ، ص ← ٠.

⇐ $\underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاص}}{\text{ص}} \times \dfrac{1}{2\times 3} = \dfrac{1}{6}$

الضرب بالمرافق

نضرب بالمرافق اذا ظهرت احدى الحالات الآتية :-

المقدار	المرافق	الناتج	المتطابقة المستخدمة
1) 1 ± جاس	1 ∓ جاس	1 − جا²س	جتا²س
2) 1 ± جتاس	1 ∓ جتاس	1 − جتا²س	جا²س
3) 1 ± قاس	1 ± قاس	1 − قا²س	− ظا²س
4) 1 ± قتاس	1 ± قتاس	1 − قتا²س	− ظتا²س
5) جاس ± جتاس	جاس ∓ جتاس	جا²س − جتا²س	− جتا2س
6) 1 ± √2 جاس	1 ∓ √2 جاس	1 − 2جا²س	جتا2س
7) 1 ∓ √2 جتاس	1 ± √2 جتاس	1 − 2جتا²س	− جتا2س
8) √(1 ± جتاس)	√(1 ∓ جتاس)	√(1 − جتا²س)	√(جا²س)
← √(احدى المقادير السابقة)	√(مرافق ما داخل الجذر)	√(ناتج المرافق)	√(المتطابقة المناسبة)

ملاحظة ①: بعد الضرب بالمرافق نستخدم متطابقات، لذلك 1 ± ظاس ، 1 ± ظتاس لا تضرب بالمرافق لعدم وجود متطابقات لـ 1 − ظا²س ، 1 − ظتا²س .

ملاحظة ②: نستخدم هذه المتطابقات اسرع في الحل :-

1) 1 + جتاس = 2جتا² $\frac{س}{2}$

2) 1 − جتاس = 2جا² $\frac{س}{2}$

ملاحظة ③:

1 ± جتاس
← مرافق
← الافضل استخدام المتطابقة الذهبية .

* 1 − جتا (اي زاوية) = 2 جا² (نصف زاوية) .
* جتا (اي زاوية) − 1 = −2 جا² (نصف الزاوية) .

مثال (٧): جد كلاً من النهايات الآتية :-

١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}}$

طريقة (١) : مرافق :-

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{س جاس}\,(١ + \text{جتاس})} = \frac{١}{٢} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{س جاس}} = \frac{١}{٢} \times ١^٢ = \frac{١}{٢}$

طريقة (٢) : متطابقة $\left(١ - \text{جتاس} = ٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢}\right) \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢}}{\text{س جاس}} = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{١}{٢}$.

٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٢}{١ - \text{قاس}}$ $\left(\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}\right)$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٢}{١ - \text{قاس}} \times \frac{١ + \text{قاس}}{١ + \text{قاس}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٢ \times ٢}{١ - \text{قا}^٢\text{س}}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}^٢}{١ - \text{قا}^٢\text{س}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}^٢}{-\text{ظا}^٢\text{س}} = \frac{٤}{-١} \times (١)^٢ = -٤$.

٣) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جا٢س} - ١}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ (ضرب ب مرافقين)

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جا٢س} - ١}{\text{جاس} - \text{جتاس}} \times \frac{\text{جا٢س} + ١}{\text{جا٢س} + ١} \times \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢\text{٢س} - ١}{\text{جا}^٢\text{س} - \text{جتا}^٢\text{س}} \times \frac{\left(\frac{٢}{\sqrt{٢}}\right)}{٢}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{-\text{جتا}^٢\text{٢س}}{-\text{جتا٢س}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \text{جتا٢س} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ٠ = ٠$

٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا٣س} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}}} \times \frac{\text{جتا٣س} + ١}{\text{جتا٣س} + ١} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}^٢\text{٣س} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}} \times ٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}^٢\text{٣س}}{٢\sqrt[٣]{\text{س}}}$

$= \frac{\left(\sqrt[٣]{\text{جا٣س}}\right)^٣ \times \text{جا٣س}}{٢\sqrt[٣]{\text{س}}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{-١}{٢} \left(\frac{\sqrt[٣]{\text{جا٣س}}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\right) \times \sqrt[٣]{\text{جا٣س}} \times \sqrt[٣]{\text{جا٣س}} \times \text{جا٣س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{-١}{٢} \left(\sqrt[٣]{٣}\,\sqrt[٣]{\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}}\right) \times \sqrt[٣]{\text{جا٣س}} \times \sqrt[٣]{\text{جا٣س}} \times \text{جا٣س} = \frac{-\sqrt[٣]{٣}}{٢} \times \sqrt[٣]{\text{جا}(٠)} \times \sqrt[٣]{\text{جا}(٠)} \times \text{جا}(٠)$

$= \frac{-\sqrt[٣]{٣}}{٢} \times ٠ \times ٠ \times ٠ = ٠$

٥) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{س جاس} \times ٢} = \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{٢س جاس}} = \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢}$

٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا٢س} - ١}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{قا٢س} + ١}{\text{قا٢س} + ١} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}^٢\text{٢س} - ١}{\text{س}^٢ \times ٢}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^٢\text{٢س}}{٢\text{س}^٢} = \frac{١}{٢} (٢)^٢ = ٢$.

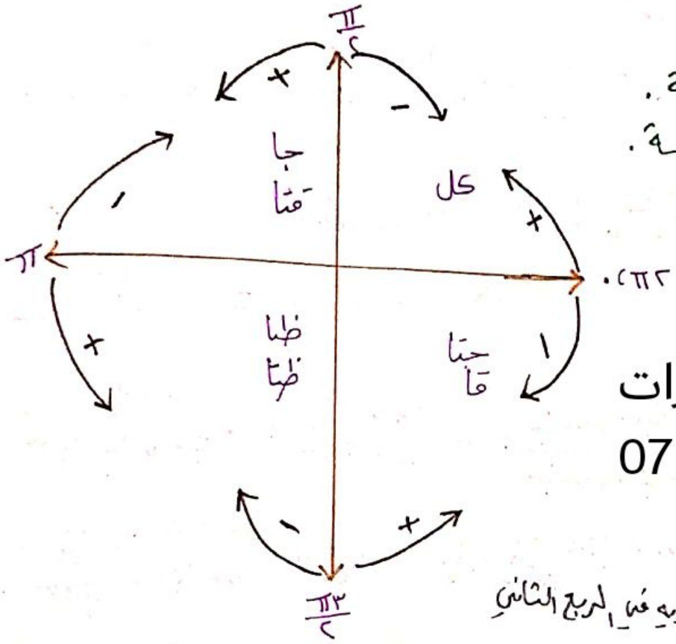
٧) $\underset{س\to\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}}{\sqrt{1+\text{جتاس}}} \times \dfrac{\sqrt{1-\text{جتاس}}}{\sqrt{1-\text{جتاس}}} = \underset{س\to\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}\times\sqrt{2}}{\sqrt{1-\text{جتا}^2\text{س}}} = \underset{س\to\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}+\sqrt{2}}{\sqrt{\text{جا}^2\text{س}}}$

$= \underset{س\to\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}\sqrt{2}}{|\text{جاس}|} \Leftarrow \underset{س\to\pi^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}\times\sqrt{2}}{-\text{جاس}} = -\sqrt{2}$

$\underset{س\to\pi^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}\times\sqrt{2}}{\text{جاس}} = \sqrt{2}$

$\Leftarrow \underset{س\to\pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس}}{\sqrt{1+\text{جتاس}}}$ غ.م

دراسة اشارة الاقترانات الدائرية :-



ملاحظة ١) يمين النهاية عكس عقارب الساعة.
٢) يسار النهاية مع عقارب الساعة.

دراسة الإشارة :- $\Rightarrow$
(−، +) ← اتجاه النهاية

يمين ← بعد
يسار ← قبل

- 0^+ ← زاوية في الربع الأول.
- 0^- ← زاوية في الربع الثاني.
- $\frac{\pi}{2}^+$ ← زاوية في الربع الثاني
- $\frac{\pi}{2}^-$ ← زاوية في الربع الأول
- π^+ ← زاوية في الربع الثالث
- / π^- ← زاوية في الربع الثاني
- / $\frac{3\pi}{2}^+$ ← زاوية في الربع الرابع
- / $\frac{3\pi}{2}^-$ ← زاوية في الربع الثالث.

مثال (٨): جد:

$\underset{س\to\pi^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{1+\text{جتاس}}}{\text{جاس}} \times \dfrac{\sqrt{1-\text{جتاس}}}{\sqrt{1-\text{جتاس}}} = \underset{س\to\pi^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{1-\text{جتا}^2\text{س}}}{\text{جاس}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{جتاس}}}$

$= \underset{س\to\pi^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{جا}^2\text{س}}}{\text{جاس}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{جتاس}}} = \underset{س\to\pi^+}{\text{نها}} \dfrac{|\text{جاس}|}{\text{جاس}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{جتاس}}}$

$= \underset{س\to\pi^+}{\text{نها}} \dfrac{-\text{جاس}}{\text{جاس}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{جتاس}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

ملاحظة : اذا كانت النهايات الدائرية احد الاشكال الاتية :-

١- جا - جا
٢- جتا - جتا
٣- ظا - ظا

← متطابقة ← استبدال.

تذكير:

١) $\text{جاأ} - \text{جاب} = ٢\text{جا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)\text{جتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right)$

٢) $\text{ظاأ} - \text{ظاب} = \text{ظا}(\text{أ}-\text{ب})(١+\text{ظاأ ظاب})$

٣) $\text{جتاأ} - \text{جتاب} = -٢\text{جا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right)$

٤) $\text{جا}٢\text{س} = ٢\text{جاس جتاس}$

٥) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاأس}}{\text{ظاب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

ملاحظة الاشارات داخل النسب المثلثية.

١) $\text{جا}(-\text{أ}) = -\text{جاأ}$
٢) $\text{ظا}(-\text{أ}) = -\text{ظاأ}$

← يحافظ على السالب

٣) $\text{جتا}(-\text{أ}) = \text{جتاأ}$ ← يقتل السالب.

مثال (٩): جد قيمة كل من النهايات التالية :-

١) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٣\text{س} - \text{جتاس}}{\text{س}^٢} = \frac{٠}{٠}$ متطابقة

$= \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}\left(\frac{٣\text{س}+\text{س}}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{٣\text{س}-\text{س}}{٢}\right)}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = -٢\times٢\times١ = -٤$

٢) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٦\text{س} - \text{جتا}٤\text{س}}{\text{س}^٢} = \frac{٠}{٠}$ متطابقة

$= \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}٥\text{س جاس}}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}٥\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = -٢\times٥\times١ = -١٠$

٣) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{س جتا}٢\text{س} - \text{س جتا}٤\text{س}}{\text{س}^٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}(\text{جتا}٢\text{س} - \text{جتا}٤\text{س})}{\text{س}^٣} = \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}(-\text{س})\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \frac{-٢\text{جا}(-\text{س})}{\text{س}} \times \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}}$

$= -٢\times-١\times٣ = ٦.$

٤) $\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{جاس - جاأ}{س^2 - أ^2} = \text{ت}$ متطابقة

$= \lim\limits_{س \to أ} \dfrac{2 جا\left(\frac{س-أ}{2}\right) جتا\left(\frac{س+أ}{2}\right)}{(س-أ)(س+أ)}$ نفرض ص = س − أ ، س ← أ ، ص ← ٠.

$= \lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{2جا\left(\frac{ص}{2}\right)}{ص} \times \lim\limits_{س \to أ} \dfrac{جتا\left(\frac{س+أ}{2}\right)}{(س+أ)} = 2 \times \frac{1}{2} \times \dfrac{جتاأ}{2أ} = \dfrac{جتاأ}{2أ}$.

٥) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{3س + جا4س}{ظا2س} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{3س}{ظا2س} + \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{جا4س}{ظا2س} = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$

٦) $\lim\limits_{س \to 0} 3س\ قا2س\ قا4س = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{3س}{ظا2س} \times \lim\limits_{س \to 0} قا4س = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

٧) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1 - جتا2س}{س^2} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1-جتا2س}{س^2} \times \dfrac{1+جتا2س}{1+جتا2س} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1 - جتا^2 2س}{س^2(1+جتا2س)}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{جا^2 2س}{س^2} \times \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1}{1+جتا2س} = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$

٨) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{ظاس}{\sqrt{ظاس+1} - 1} \times \dfrac{\sqrt{ظاس+1} + 1}{\sqrt{ظاس+1} + 1} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{ظاس\left(\sqrt{ظاس+1} + 1\right)}{\cancel{ظاس}} = 1 + 1 = 2$

بعض الحالات الخاصة :-

اذا جاء في السؤال أحد الحالات الاتية :-

١- $\lim\limits_{س \to زاوية} \dfrac{جا - عدد}{س - زاوية}$ ٢- $\lim\limits_{س \to زاوية} \dfrac{جتا - عدد}{س - زاوية}$ ٣- $\lim\limits_{س \to زاوية} \dfrac{ظا - عدد}{س - زاوية}$.

خطوات الحل :-

١- تستبدل العدد ب (جا، جتا، ظا) الزاوية .

٢- نكمل الحل باستخدام المتطابقات والفرض .

* يفضل ان تكون الزاوية محورية لاستخدام هذه الطريقة $\left(\frac{\pi}{3}، \frac{\pi}{2}، \frac{\pi}{6}\right)$.

مثال (١٠): جد قيمة كل من النهايات الآتية :-

١- $\underset{س \to \frac{\pi}{3}}{نها} \frac{جاس - \frac{\sqrt{3}}{2}}{س - \frac{\pi}{3}} = \frac{0}{0}$

← $\underset{س \to \frac{\pi}{3}}{نها} \frac{جاس - \frac{\sqrt{3}}{2}}{س - \frac{\pi}{3}}$ ← نستبدل العدد ب جا$(\frac{\pi}{3})$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{3}}{نها} \frac{جاس - جا(\frac{\pi}{3})}{س - \frac{\pi}{3}} = \underset{س \to \frac{\pi}{3}}{نها} \frac{2 جا(\frac{س - \frac{\pi}{3}}{2}) جتا(\frac{س + \frac{\pi}{3}}{2})}{س - \frac{\pi}{3}}$

نفرض ص $= س - \frac{\pi}{3}$ ، $س \to \frac{\pi}{3}$ ، ص $\to 0$

$= \underset{ص \to 0}{نها} \frac{2 جا\frac{ص}{2}}{ص} \times \underset{س \to \frac{\pi}{3}}{نها} جتا(\frac{س + \frac{\pi}{3}}{2}) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}$.

٢- $\underset{س \to \frac{\pi}{4}}{نها} \frac{1 - ظاس}{4س - \pi} = \frac{0}{0}$ نستبدل (1) ب ظا$(\frac{\pi}{4})$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{4}}{نها} \frac{ظا(\frac{\pi}{4}) - ظاس}{4(س - \frac{\pi}{4})} = \underset{س \to \frac{\pi}{4}}{نها} \frac{ظا(\frac{\pi}{4} - س)(1 + ظا\frac{\pi}{4} ظاس)}{4(س - \frac{\pi}{4})}$

نفرض انه
ص $= س - \frac{\pi}{4}$
$س \to \frac{\pi}{4}$ ، ص $\to 0$

$= \underset{ص \to 0}{نها} \frac{- ظاص}{4ص} \times \underset{س \to \frac{\pi}{4}}{نها} (1 + ظا\frac{\pi}{4} ظاس) = \frac{-1}{4} \times 2 = \frac{-1}{2}$

٣- $\underset{س \to \frac{\pi}{6}}{نها} \frac{جتاس - \sqrt{3} جاس}{6س - \pi} = \frac{0}{0}$ نخرج جتاس عامل مشترك ، $\sqrt{3}$ عامل مشترك.

$= \underset{س \to \frac{\pi}{6}}{نها} \frac{جتاس (1 - \sqrt{3} ظاس)}{6(س - \frac{\pi}{6})} = \underset{س \to \frac{\pi}{6}}{نها} \frac{\sqrt{3} جتاس (\frac{1}{\sqrt{3}} - ظاس)}{6(س - \frac{\pi}{6})}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{6}}{نها} \frac{\sqrt{3} جتاس (ظا\frac{\pi}{6} - ظاس)}{6(س - \frac{\pi}{6})} = \underset{س \to \frac{\pi}{6}}{نها} \frac{ظا(\frac{\pi}{6} - س)}{(س - \frac{\pi}{6})} \times \underset{س \to \frac{\pi}{6}}{نها} ((1 + ظا\frac{\pi}{6} ظاس) \frac{\sqrt{3}}{6} جتاس)$

نفرضها ص $= س - \frac{\pi}{6}$ ، $س \to \frac{\pi}{6}$ ، ص $\to 0$.

← $\underset{ص \to 0}{نها} \frac{- ظاص}{ص} \times (1 + \frac{1}{3}) \times (\frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-1}{3}$

الطرح والاضافة :-

١- اذا كانت النهاية المثلثية تحتوي ٣ حدود في البسط.

٢- اذا كانت النهاية المثلثية تحتوي على حدين مختلفين.

- نعمل على فصل النهاية الى نهايتين (الطرح والاضافه)
- نستطيع حل الاسئلة بطريقة وصول نبحث عن حدان بشكلان متطابقة.

مثال ١١: جد كلاً من النهايات التالية (ان وجدت) :-

١) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1+\text{جتا}4س-2\text{جتا}^2س}{س^2} = \dfrac{0}{0}$ $\text{جتا}\,4\times 0 = \text{جتا}(0) = 1$

ط١ : نطرح ونضيف (١) :-

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1+\text{جتا}4س-1+1-2\text{جتا}^2س}{س^2} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جتا}4س-1}{س^2} + \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{1-2\text{جتا}^2س+1}{س^2}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{-2\text{جا}^2 2س}{س^2} + \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{2(1-\text{جتا}^2س)}{س^2} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{-2\text{جا}2س}{س} \times \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}2س}{س} + \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{2\text{جا}^2س}{س^2}$

$= -2\times2\times2 + 2 = -6$

ط٢ : $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جتا}4س-\text{جتا}2س}{س^2} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{-2\,\text{جا}\left(\frac{4س-2س}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{4س+2س}{2}\right)}{س^2}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{-2\,\text{جا}(س)\,\text{جا}3س}{س^2} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{-2\,\text{جا}س}{س} \times \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}3س}{س} = -2\times3 = -6$

٢) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}^2س-\text{جتا}س-1}{\text{جتا}س} = \dfrac{0}{0}$

نعوض $س \to \frac{\pi}{2}$ في $\text{جا}^2\frac{\pi}{2} = 1$

ط١ : الطرح والاضافة

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}^2س-1+1-\text{جتا}س-1}{\text{جتا}س} = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}^2س-1}{\text{جتا}س} + \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cancel{1}-\text{جتا}س-\cancel{1}}{\text{جتا}س}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\text{جتا}^2س}{\text{جتا}س} - 1 = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} -\text{جتا}س - 1 = -1$

ط٢ : $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\text{جتا}^2س-\text{جتا}س}{\text{جتا}س} = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cancel{\text{جتا}س}(-\text{جتا}س-1)}{\cancel{\text{جتا}س}} = -1$

المتقمه والمكملة

تستخدم هذه الطريقة اذا كان السؤال يحتوي على (جا، جتا، ظا) منفرد بدون قوة.

طريقة الحل:

نعوض ذيل النهاية داخل زاويه الدائري :-

① جا ( )، جتا ( ) ← $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ← متممة، $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ← شبيه المتممة.

π ← مكملة، 2π ← شبيه المكملة.

عمل كل من المتممه والمكملة .

- المتممه (شبيه المتممه) ← تتحول الـ جتا الى جا
- المكملة (شبيه المكملة) ← تحافظ على جا.

② ظا ( ) ← π ← مكمله، 3π ← شبيه المكملة.

دراسة الاشارة ندرس الاشارة لكل من (جا، جتا، ظا) حسب ناتج التعويض في الزاوية.

• اذا كان ناتج التعويض في الزاويه $\frac{\pi}{2}$، اذاً اشارة (جا، جتا، ظا) حسب الاشارة في الربع الاول لكل منهم.

← داخل المثلث (التعويض - الموجود)

مثال (١٢) جد قيمه كل من النهايات التالية :-

١) $\lim\limits_{س\to 1} \frac{جا(\pi س)}{س-1} = \frac{0}{0}$

نفرض س ← ١ في الزاويه π س

ناتج التعويض π ←
- التعويض - الموجود $(\pi - \pi س)$.
- الربع الثاني ← جا (موجب).
- مكملة ← نترك جا كما هو.

$= \lim\limits_{س\to 1} \frac{جا(\pi - \pi س)}{س-1} = \lim\limits_{س\to 1} \frac{جا(-\pi(س-1))}{س-1}$

نفرض ص = س - ١، س ← ١، ص ← صفر

$\Leftarrow \lim\limits_{ص\to 0} \frac{جا(-\pi ص)}{ص} = -\pi.$

ملاحظة: (طريقه اختيار الربع الثاني) بعد تعويض ذيل النهاية في الزاويه ← π

← نأخذ الربع الموجود قبل π ومن خلال الربع ندرس الاشارة.

٢) $\lim\limits_{س\to\pi} \frac{جاس}{\pi^2 - س^2} = \frac{0}{0}$

نفرض $(س-\pi)$ في الزاوية س ← ناتج التعويض ← π ←
- (التعويض − الموجود) ← $\pi - س$
- مكملة ← يبقى جا كما هو
- الربع الثاني ← الـجا ، موجود.

$= \lim\limits_{س\to\pi} \frac{جا(\pi-س)}{\pi^2-س^2} = \lim\limits_{س\to\pi} \frac{جا(\pi-س)}{\pi-س} \times \frac{1}{(\pi+س)}$ نفرض $ص = \pi - س$ ، $س\to\pi$ ، $ص\to 0$.

$= \lim\limits_{ص\to 0} \frac{جاص}{ص} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$

٣) $\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جا^3س - 1}{(\pi - 2س)^2} = \frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{(جاس-1)(جا^2س + جاس + 1)}{(\pi-2س)^2} = 3\times \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جاس - 1}{(\pi-2س)^2} \times \frac{جاس+1}{جاس+1}$

$= \frac{3}{2} \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جا^2س - 1}{(\pi-2س)^2} = \frac{-3}{2} \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جتا^2س}{(2(\frac{\pi}{2}-س))^2} = \frac{-3}{8} \left(\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جتاس}{(\frac{\pi}{2}-س)}\right)^2$

$= \frac{-3}{8} \left(\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2}-س)}{(\frac{\pi}{2}-س)}\right)^2$ نفرض $ص = \frac{\pi}{2} - س$ ، $س\to\frac{\pi}{2}$ ، $ص\to 0$.

$= \frac{-3}{8} \left(\lim\limits_{ص\to 0} \frac{جاص}{ص}\right)^2 = \frac{-3}{8} \times (1)^2 = \frac{-3}{8}$.

٤) $\lim\limits_{س\to\pi^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{1+ظتا^2س}}}{س-\pi} = \frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{س\to\pi^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{قتا^2س}}}{\pi-س}$ $= \lim\limits_{س\to\pi^+} \frac{\sqrt{جا^2س}}{\pi-س} = \lim\limits_{س\to\pi^+} \frac{|جاس|}{\pi-س} = \lim\limits_{س\to\pi^+} \frac{-جاس}{\pi-س}$

$= \lim\limits_{س\to\pi^+} \frac{-جا(\pi-س)}{(\pi-س)}$ نفرض $ص = \pi - س$ ، $س\to\pi^+$ ، $ص\to 0^+$

$\Leftarrow \lim\limits_{ص\to 0^+} \frac{-جاص}{-ص} = 1$

٥) $\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} (س - \frac{\pi}{2}) ظاس = \frac{0}{0}$

$\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{(س-\frac{\pi}{2})(جاس)}{جتاس}$ تعويض مباشر

$= \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{(س-\frac{\pi}{2})}{جا(\frac{\pi}{2}-س)}$ نفرض ان $ص = (\frac{\pi}{2} - س)$ ، $س\to\frac{\pi}{2}$ ، $ص\to 0$ $\Leftarrow \lim\limits_{ص\to 0} \frac{ص}{-جاص} = -1$.

٦) $\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س - \text{جا}س}{١ - \text{جتا}٢س} = \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س - \text{جا}س}{٢\text{جا}^٢س} = \dfrac{١}{٢} \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س - \text{جا}س}{|\text{جا}س|\,|\text{جا}س|}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{س - \text{جا}س}{٢\text{جا}س} = \text{صفر}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٠^-} \dfrac{س - \text{جا}س}{-٢\text{جا}س} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س - \text{جا}س}{١ - \text{جتا}٢س} = \text{صفر}$

أسئلة وزارة:

٢٠١٣ / صيفي

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^٢ - ٤س - ١٥|}{|س - ١٥|} & ، س > ٥ \\ أ\,\text{جتا}\dfrac{\pi}{٥}س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\text{نها}_{س \leftarrow ٥} ق(س)$ موجودة فما قيمة أ.

الحل:

$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤س - ٥}{س - ٥} & ، س > ٥ \\ أ\,\text{جتا}\dfrac{\pi}{٥}س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$

بما أن $\text{نها}_{س \leftarrow ٥} ق(س)$ موجودة $\Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ٥^+} ق(س) = \text{نها}_{س \leftarrow ٥^-} ق(س)$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٥} \dfrac{س^٢ - ٤س - ٥}{س - ٥} = أ\,\text{جتا}\dfrac{\pi}{٥} \times ٥ + ٥$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٥} \dfrac{(\cancel{س - ٥})(س + ١)}{\cancel{س - ٥}} = أ\,\text{جتا}\pi + ٥ \Leftarrow ٥ + ١ = أ \times -١ + ٥$

$٦ = -أ + ٥ \Leftarrow أ = ٥ - ٦$

$\boxed{أ = -١}$

٢٠١٨ / شتوي جديد : جد $\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا}س}{\sqrt{س^٣ + س^٢}}$

$= \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا}س}{\sqrt{س^٢(س + ١)}} = \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا}س}{\sqrt{س^٢}\sqrt{س + ١}} = \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا}س}{|س|\sqrt{س + ١}}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{\text{جا}س}{س\sqrt{س + ١}} = \text{نها}_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{\text{جا}س}{س} \times \text{نها}_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{١}{\sqrt{س + ١}} = ١ \times \dfrac{١}{\sqrt{١}} = ١$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٠^-} \dfrac{\text{جا}س}{-س\sqrt{س + ١}} = \text{نها}_{س \leftarrow ٠^-} \dfrac{\text{جا}س}{-س} \times \dfrac{١}{\sqrt{س + ١}} = -١ \times \dfrac{١}{\sqrt{١}} = -١$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا}س}{\sqrt{س^٣ + س^٢}}$ غ.م

٢٠١٩/ صيفي تكميلي (٢٠٠١)

قيمة $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ (قاس + ٧س قتا٢س) تساوي :

أ) ١٨   ب) $\frac{٢}{٩}$ ج) $\boxed{\frac{٩}{٢}}$ د) صفر

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{جتاس}} + \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٧س}{\text{جا}٢س} = \frac{١}{١} + \frac{٧}{٢} = \frac{٩}{٢}$

٢٠١٩/ مستوى جديد

اذا كانت $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(ب^٢+٢)س}{\text{ظا} \frac{١}{٢} س} = ٦$ ، حيث ب > ٠ ، فإن قيمة الثابت ب تساوي :

أ) ٢   ب) $\sqrt{٢}$ ج) $\sqrt{١٠}$ د) $\boxed{١}$

الحل : $\frac{ب^٢+٢}{\frac{١}{٢}} = ٦ \Leftarrow ب^٢ + ٢ = ٣$

$ب^٢ = ١ \Leftarrow ب = \pm ١ \Leftarrow$ الجواب ب = ١ لأن ب > ٠ .

٢٠١٩/ صيفي قديم

اذا كانت $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ (أس٢ ظتا٢ ٣س) = ١ ، فإن قيمة الثابت أ تساوي :-

أ) $\boxed{٩}$ ب) $\frac{١}{٩}$ ج) ٣   د) $\frac{١}{٣}$

الحل : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{أس^٢}{\text{ظا}^٢٣س} = ١ \Leftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{أس}{\text{ظا}٣س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س}{\text{ظا}٣س} = ١$

$\frac{أ}{٣} \times \frac{١}{٣} = ١ \Leftarrow \frac{أ}{٩} = ١ \Leftarrow أ = ٩ .$

٢٠١٩/ صيفي تكميلي (٢٠٠١) اذا كانت $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٢س}{(أ-١)س} = \frac{١}{٥}$ فإن قيمة الثابت أ تساوي :

أ) $\boxed{١١}$ ب) ٩   ج) ١٠   د) ٧

$\frac{٢}{أ-١} = \frac{١}{٥} \Leftarrow أ - ١ = ١٠$

$\boxed{أ = ١١}$.

٢٠١٣/شتوي

$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س + جا٤س}}{\text{٥س}} =$

أ) $\boxed{\text{١}}$ ب) $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ ج) $\frac{\text{١}}{\text{٥}}$ د) صفر

$\leftarrow \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{٥س}} + \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا٤س}}{\text{٥س}} = \frac{\text{١}}{\text{٥}} + \frac{\text{٤}}{\text{٥}} = \frac{\text{٥}}{\text{٥}} = \text{١}$

٢٠٠٩/شتوي

$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س + جا٢س}}{\text{٣س}} =$

أ) صفر ب) $\boxed{\text{١}}$ ج) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ د) $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

الحل: $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{\text{٣س}} + \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا٢س}}{\text{٣س}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}} = \frac{\text{٣}}{\text{٣}} = \text{١}$

جد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س − جا٣س + ظا٥س}}{\text{٣س − ظا}^{\text{٢}}\text{س}}$

الحل:- $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{جا٣س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا٥س}}{\text{س}}}{\frac{\text{٣س}}{\text{س}} - \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}\ \text{ظاس}} = \frac{\text{١ − ٣ + ٥}}{\text{٣ − (١×٠)}} = \frac{\text{٣}}{\text{٣}} = \text{١}$.

٢٠٠٨/صيفي

$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − جتا٢س}}{\text{٦س}^{\text{٢}}}$:

أ) $\boxed{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}$ ب) صفر ج) ١ د) $\frac{\text{١}}{\text{٩}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − جتا٢س}}{\text{٦س}^{\text{٢}}} \times \frac{\text{١ + جتا٢س}}{\text{١ + جتا٢س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\text{(٦س}^{\text{٢}}\text{)(١+١)}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\text{١٢س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٤}}{\text{١٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

٢٠١٢/صيفي

جد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − جتاس}}{\text{س جاس}} \times \frac{\text{١ + جتاس}}{\text{١ + جتاس}}$

$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س جاس × ٢}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س جاس × ٢}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{١ × ١ ×}\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}$.

٢٠١٠/صيفي .

حد $\text{نها}_{س\to ٠} \dfrac{\text{قا}^٢ ٢س-١}{س^٢} \times \dfrac{\text{قا}٢س+١}{\text{قا}٢س+١}$

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{قا}^٢ ٢س-١}{س^٢(١+١)} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}^٢ ٢س}{٢\times س^٢} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{س} \times \frac{\text{ظا}٢س}{س} \times \frac{١}{٢} = ٢\times ٢\times \frac{١}{٢} = ٢$$

٢٠١٦/صيفي

حد $\text{نها}_{س\to ٠} \dfrac{٤-س\,\text{ظا}س-٤\,\text{جتا}س}{س\,\text{جا}٤س}$

$$= \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٤-٤\,\text{جتا}س-س\,\text{ظا}س}{س\,\text{جا}٤س} = \text{نها}_{س\to ٠} \left(\frac{٤(١-\text{جتا}س)}{س\,\text{جا}٤س} - \frac{\cancel{س}\,\text{ظا}س}{\cancel{س}\,\text{جا}٤س} \right)$$

$$= \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٤(١-\text{جتا}س)(١+\text{جتا}س)}{س\,\text{جا}٤س\,(١+\text{جتا}س)} - \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\frac{\text{ظا}س}{س}}{\frac{\text{جا}٤س}{س}} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٤(١-\text{جتا}^٢س)}{س\,\text{جا}٤س \times ٢} - \frac{١}{٤}$$

$$= \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٤\,\text{جا}^٢س}{س\,\text{جا}٤س\times ٢} - \frac{١}{٤} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٤\,\text{جا}س}{س} \times \frac{\text{جا}س}{\text{جا}٤س} \times \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤}$$

$$= ٤ \times \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\frac{\text{جا}س}{س}}{\frac{\text{جا}٤س}{س}} \times \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = ٤ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

صهيب شقيرات
0788879679

٢٠١٨/صيفي قديم .

حد $\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\sqrt{٢}\,\text{جتا}س-١}{١-\text{ظا}س}$

$$\text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢}\,\text{جتا}س-١}{١-\frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}} \times \frac{\sqrt{٢}\,\text{جتا}س+١}{\sqrt{٢}\,\text{جتا}س+١} = \text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\,\text{جتا}^٢س-١}{\frac{\text{جتا}س-\text{جا}س}{\text{جتا}س} \times (١+١)}$$

$$= \text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جتا}س-\text{جا}س} \times \frac{\text{جتا}س}{٢} \times \frac{\text{جتا}س+\text{جا}س}{\text{جتا}س+\text{جا}س} = \text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}٢س \times \text{جتا}س\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}+\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)}{٢\times(\text{جتا}^٢س-\text{جا}^٢س)}$$

$$= \text{نها}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\cancel{\text{جتا}٢س} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{٢}{\sqrt{٢}}}{٢\times \cancel{\text{جتا}٢س}} = \frac{\frac{٢}{٢}}{٢} = \frac{١}{٢}$$

٢٠١٩/شتوي جديد .

حد $\text{نها}_{س\to ٠} \dfrac{\text{جتا}٥س+٣\,\text{جتا}س-٤}{س^٢}$

$$= \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{جتا}٥س-١+٣\,\text{جتا}س-٣}{س^٢} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{جتا}٥س-١}{س^٢} + \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٣(\text{جتا}س-١)}{س^٢}$$

$$= \text{نها}_{س\to ٠} \frac{\text{جتا}٥س-١}{س^٢} \times \frac{\text{جتا}٥س+١}{\text{جتا}٥س+١} + \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٣(\text{جتا}س-١)}{س^٢} \times \frac{\text{جتا}س+١}{\text{جتا}س+١}$$

$$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}^2 ٥س - ١}{٢ \times س^2} + \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{٣(\text{جتا}^2 س - ١)}{٢ \times س^2} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}^2 ٥س}{٢س^2} + \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{٣ \times -\text{جا}^2 س}{٢س^2}$$

$$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}٥س}{٢س} \times \frac{\text{جا}٥س}{س} + \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{-٣\text{جا}س}{٢س} \times \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \frac{-٥}{٢} \times ٥ + \frac{-٣}{٢} \times ١ = \frac{-٢٥}{٢} + \frac{-٣}{٢} = \frac{-٢٨}{٢} = -١٤ .$$

٢٠١٩/ صيفي (طلاب ٢٠٠١)

جد $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{٣ - س\,\text{ظا}٢س - ٣\text{جتا}س}{س\,\text{جا}٥س}$.

الحل:

$$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{٣ - ٣\text{جتا}س}{س\,\text{جا}٥س} - \frac{\cancel{س}\,\text{ظا}٢س}{\cancel{س}\,\text{جا}٥س} \right)$$

$$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{٣(١ - \text{جتا}س)}{س\,\text{جا}٥س} - \frac{\text{ظا}٢س}{\text{جا}٥س} \right)$$

$$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{٣ \times (١ - \text{جتا}س)}{س\,\text{جا}٥س} - \frac{١ + \text{جتا}س}{١ + \text{جتا}س} - \frac{\text{ظا}٢س}{\text{جا}٥س} \right)$$

$$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{٣(١ - \text{جتا}^2 س)}{س\,\text{جا}٥س} \times \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٥} \right)$$

$$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{٣\text{جا}^2 س}{س\,\text{جا}٥س} \times \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٥} \right)$$

$$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{٣\text{جا}س}{س} \times \frac{\text{جا}س}{\text{جا}٥س} \times \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٥} \right)$$

$$٣ \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{١٠} - \frac{٢}{٥}$$

$$= \frac{-١}{١٠} \quad \#$$

٢٠١٦/شتوي . جد $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{2س - جاس}{\sqrt{1 - جتا2س}}$

$$\lim_{س \to 0} \frac{2س - جاس}{\sqrt{1 - جتا2س}} \times \frac{\sqrt{1 + جتا2س}}{\sqrt{1 + جتا2س}} = \lim_{س \to 0} \frac{(2س - جاس)\sqrt{2}}{\sqrt{1 - جتا^2 2س}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{2}\,(2س - جاس)}{\sqrt{جا^2 2س}} = \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{2}\,(2س - جاس)}{|جا2س|}$$

$$\xleftarrow[\quad -جا2س \quad]{- \; -} \; \underset{0}{\bullet} \; \xrightarrow[\quad جا2س \quad]{+ \; +}$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,(2س - جاس)}{جا2س} = \lim_{س \to 0^+} \left(\frac{2س}{جا2س} - \frac{جاس}{جا2س}\right) \times \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} \times \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to 0^-} \left(\frac{2س}{-جا2س} - \frac{جاس}{-جا2س}\right) \times \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to 0} \frac{2س - جاس}{\sqrt{1 - جتا2س}} \quad \text{غ.م} \quad \#$$