الأستاذ : صهيب شقيرات
ماستر في الرياضيات
0788879679

الفصل الأول : أساسيات في الرياضيات

صفحة
- مجموعات الأعداد والفترات (١-٤)
- قوانين الأسس. (٥-٦)
- الاقترانات ورسم البياني للاقترانات
  - كثير الحدود (٦-٢١)
  - تحليل كثيرات الحدود الى عواملة (١٤-٢١)
  - القيمة المطلقة (٢١-٢٦)
  - اكبر عدد صحيح (٢٦-٣١)
  - دراسه اشارة الاقتران (٣٢-٣٥)
  - الجذري (٣٥-٤٠)
  - الأسي (٤١-٤٣)
  - المتشعب (٤٢-٤٥)
- تركيب الاقترانات (٤٥-٤٦)
- حل نظام معادلات بالحذف او بالتعويض (٤٧-٥٠)
- المضاعف المشترك الاصغر والعامل المشترك الاكبر وتوحيد المقامات (٥١-٥٣)
- خاصية التوزيع في حاله الجذور والكسور (٥٣-٥٤)
- معادله الخط المستقيم (٥٤-٥٥)
- قانون المسافه بين نقطتين (٥٥-٥٦)
- التوازي والتعامد وقانون الجيب وجيب التمام (٥٦-٥٧)
- معلومات عن الهندسة (٥٧-٥٨)
- قوانين المساحات وحجم (٥٨-٦٢)
- العمليات على الاقترانات النسبية (٦٣-٦٦)
- اللوغاريتم (٦٧-٦٩)

الفصل الثالث
للصف الثاني ثانوي
العلمي + الادبي

مراجعة

صهيب شقيرات 0788879679

• مجموعات الأعداد والفترات.

- مجموعة الأعداد الطبيعية.

$ط = \{١، ٢، ٣، .....\}$.

- مجموعة الأعداد الصحيحة.

$ص = \{١، ٢، ٣، ....، ٠، -١، -٢، -٣، ....\}$.

$\overset{+}{ص}$ = {١، ٢، ٣، ...}

$\overset{-}{ص}$ = {-١، -٢، -٣، ....}

- مجموعة الأعداد النسبية :- هو كل عدد يمكن كتابته على صورة كسر $\frac{أ}{ب}$.

$ن = \{\frac{أ}{ب} : أ، ب \in ص ، \underset{\text{المقام}}{ب} \neq ٠\}$

- مجموعة الأعداد غير النسبية :- $\bar{ن}$ ← غير نسبي.

هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر $\frac{أ}{ب}$.

⇐ جذور المربعات الغير كاملة أو المكعبات الغير كاملة.

والأعداد الغير منتهية والغير دورية.

دليل الجذر $\sqrt[\cdots]{(\text{عدد})}$ ← يبدأ دليل الجذر من العدد ٢ اذا لم يكتب يكون ٢.

$\sqrt{٤} = ٢$ / $\sqrt{٩} = ٣$ جذور تربيعية كاملة.

- المربع الكامل :- هو العدد الذي اذا ضربته بنفسه مرتان يعطي ما داخل الجذر.

$\sqrt{٥٦}$ ← غير كامل.

$\sqrt{١١}$ ← غير كامل.

- المكعب الكامل.

$\sqrt[٣]{(عدد)}$ جذر تكعيبي

١- $\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$ مكعب كامل ...... $٥ \times ٥ \times ٥ = ١٢٥$ نسبي

٢- $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ مكعب كامل ..... $٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$ نسبي

٣- $\sqrt[٣]{٢٦} =$ مكعب غير كامل ..... غير نسبي

٤- $\sqrt[٣]{١١} =$ مكعب غير كامل ..... غير نسبي

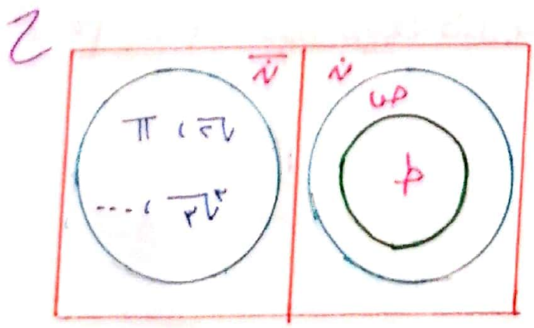
ملاحظة:- ١٢٣٫٤٢٤٢٤٢١٣٦٨ غير نسبي.

١٣٫٣٣٣.... نسبي.

ملاحظة:- π غير نسبي لأنه غير منتهي.

$\pi =$ ٣٫١٤٢٨٥٧١٣٤...

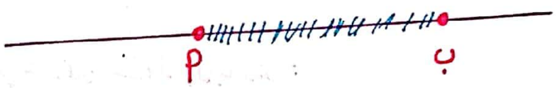
• مجموعات الأعداد الحقيقية ح :



الفترات

١- الفترة المغلقة :-

أ- [أ، ب] : مغلقة من الطرفين وهي تمثل العددين أ، ب وجميع القيم التي بينها.

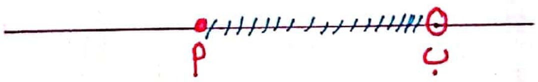


ب- (أ، ب] : نصف مغلقة ونصف مفتوحة.

وهي مفتوحة عند أ ، ومغلقة عند ب ، وهي تمثل الاعداد التي بينها عدا العدد أ.

ج- [أ، ب) : نصف مغلقة ونصف مفتوحة.

وهي مفتوحة عند ب ، ومغلقة عند أ ، وهي تمثل الاعداد التي بينها عدا العدد ب.



٢- الفترة المفتوحة :-

(أ، ب) مفتوحة من الطرفين وهي تمثل كل الاعداد بين أ، ب عدا العددين أ، ب.

ملاحظه على خط الأعداد.

[← مغلقة. تكتب على شكل ●

(← مفتوحة تكتب على شكل ○

مثال (١)

مثل الأعداد والفترات الآتيه على خط الأعداد:-

١) {١، ٢، ٧}

٢) [٢، ٥)

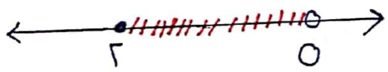
٣) {٣، ٧} ∪ {١، ٢}

٤) [$\sqrt{٧}$، ٦] ∪ (٨، ٩)

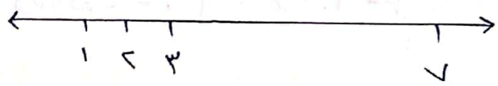
الحل:-

١-

٢-



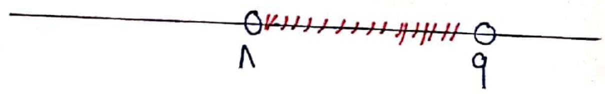
٣-

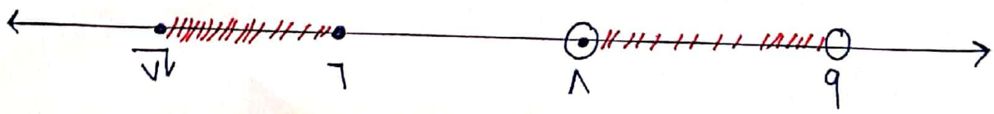


{٣، ٧، ٢، ١}.

٤- [$\sqrt{٧}$، ٦]

(٨، ٩)





ملاحظه:-

← ∪ : اتحاد المجموعات.

ويعني دمج المجموعتين ببعضهما.

← ∩ : تقاطع المجموعات.

قوانين الأسس.

١- الأسس في حالة الضرب تجمع شرط الاساسات متساوية.

$$أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$$

٢- الأسس في حالة القسمة تطرح شرط الاساسات متساوية.

$$\frac{أ^{ن}}{أ^{م}} = أ^{ن-م}$$

٣- الأسس في حالة الرفع تضرب.

$$(أ^{ن})^{م} = أ^{ن\times م}$$

٤- الأسس في حالة الضرب توزع.

$$(أ \times م)^{ن} = أ^{ن} \times م^{ن}$$

٥- الأسس في حالة القسمة توزع.

$$\left(\frac{أ}{م}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{م^{ن}}$$

٦- $\sqrt[ن]{(\text{عدد})^{م}} = (\text{العدد})^{\frac{م}{ن}}$

٧- $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$

٨- $س^{٠} = ١$

مثال (٢): استخدم قوانين الأس في تبسيط المقادير التالية.

١) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤}$

٢) $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = (٢^{٣})^{\frac{٢}{٣}}$

٣) $(١٦)^{\frac{-٣}{٤}} = (٢^{٤})^{\frac{-٣}{٤}}$

٤) $\left(\sqrt[٣]{س^{٤}}\right)^{٥} = \left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٤\times٥} = س^{\frac{٢٠}{٣}}$

٥) $\sqrt{١٢} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٤}$

$= \sqrt{٣} \times ٢$

$= ٢\sqrt{٣}$.

الاقترانات :-

- كثيرات الحدود
- الاقتران النسبي
- اقتران القيمة المطلقة
- الاقتران الجذري
- الاقتران المتشعب
- الاقتران الأسي
- اقتران أكبر عدد صحيح.

أولاً :- اقتران كثير الحدود.

$$ق(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + أ_{ن-2} س^{ن-2} \dots\dots أ_1 س + أ_0$$

⇓ شكل اقتران كثير الحدود.

- مجال الاقتران كثير الحدود هو ح ← مجموعة الاعداد الحقيقية.
- درجة كثير الحدود هي القوة الاكبر للعدد س في الاقتران ق(س).

أنواع كثيرات الحدود.

أ- الثابت

$ق(س) = \underset{(رقم)}{أ}$ ← كثير حدود من الدرجة (٠)

⇐ مثل $ق(س) = ٢$

$ق(س) = ١١$

ب- الاقتران الخطي. وهو اقتران من الدرجة الاولى.

$ق(س) = أ س + ب$

حيث : أ : معامل س

ب : ثابت

أ، ب $\in$ ح ؛ أ $\neq$ صفر

⇐ مثل $ق(س) = س - ٤$

$ق(س) = -٨ + ٤ س$

$ق(س) = ٤ س + ١٨$

$ق(س) = ٤ س^٣ + ٢ س^٢ + ٢ س + ٢$ ← ليس اقتران خطي لانه من الدرجة الثانية.

جـ - الاقتران التربيعي.

ق(س) = أ س² + ب س + جـ

حيث: أ : معامل س²

ب : معامل س

جـ : ثابت

أ، ب، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

د - الاقتران التكعيبي.

ق(س) = أ س³ + ب س² + جـ س + د .

حيث : أ : معامل س³

ب : معامل س²

جـ : معامل س

د : ثابت

أ، ب، جـ، د ∈ ح ، أ ≠ ٠

مثال (٣): أيٌّ من الاقترانات الآتية تمثل كثير الحدود ، ثم حدد درجة كثير الحدود :- .

١) ق(س) = ٢√س + ٣س − ٤

الحل : ليس كثير الحدود لأن √س = س^(١/٢) ← أسها عدد نسبي

٢) ق(س) = √٢ س + ١/٥ س²

الحل : كثير حدود من الدرجة الثانية .

٣) ق(س) = ٢س − ٣/س² + ٥

الحل : ليس كثير حدود لأن ٣/س² = ٣س^(−٢) ← الأس سالب .

٤) $ق(س) = ٢س^٤ - ٥س^٤ + ٥$

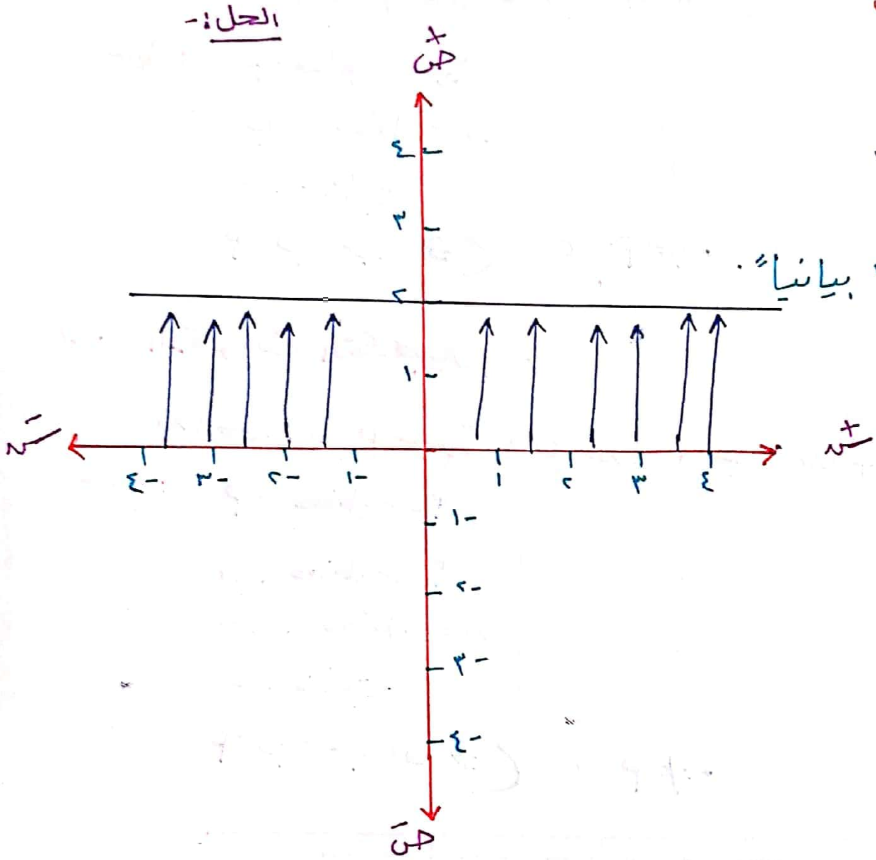
الحل: كثير الحدود من الدرجة الرابعة.

الرسم البياني للاقترانات

← الاقتران الثابت $ق(س) = ٢$

مثال (٤) مثل $ق(س) = ٢$ بيانياً.

الحل:-

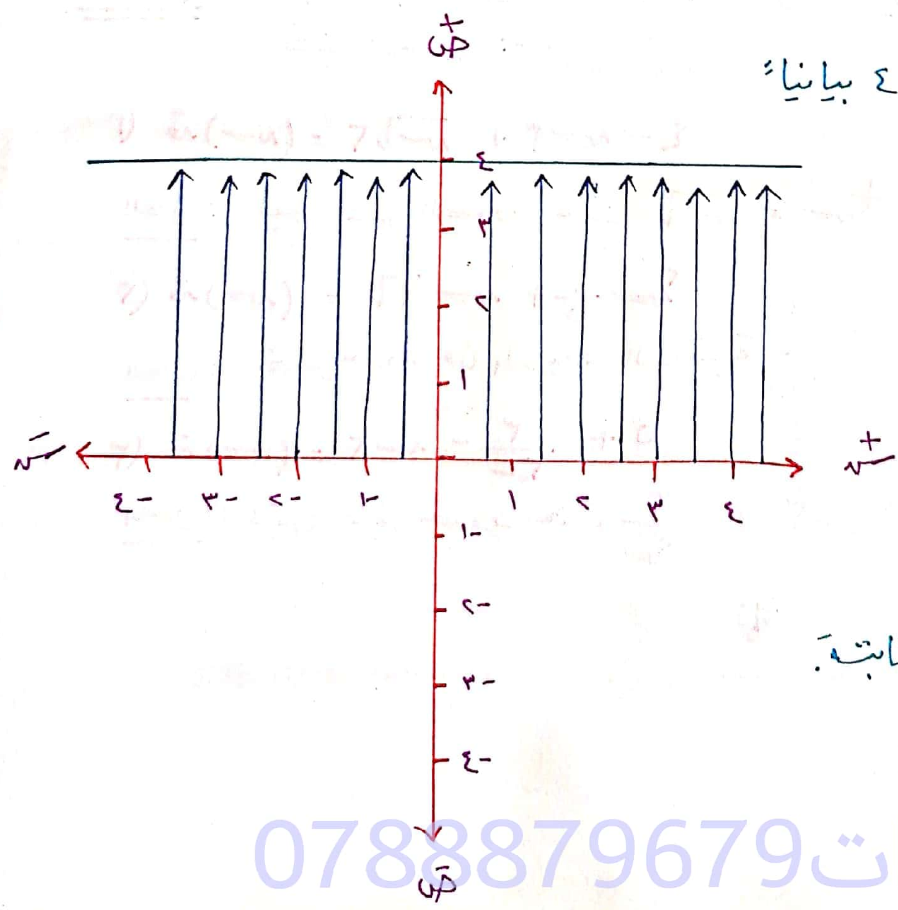


ملاحظة

ق(س) دائماً تعني ص

ق(س) = ص.

مثال (٥) مثل $ق(س) = ٤$ بيانياً



ملاحظة

قيمة ناتج التعويض دائماً ثابتة.

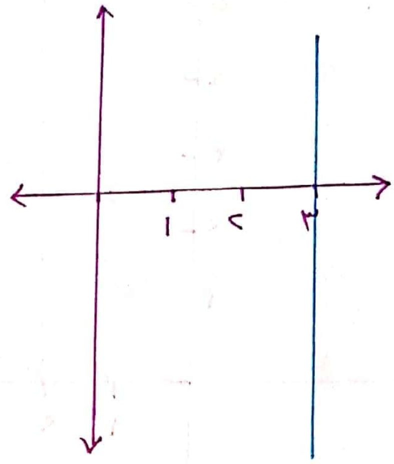
ملاحظة

المستقيم س = م ، ليس اقتران وإنما مستقيم يوازي محور الصادات.

مثال (٦) مثل الاقترانات التالية بيانيًا.

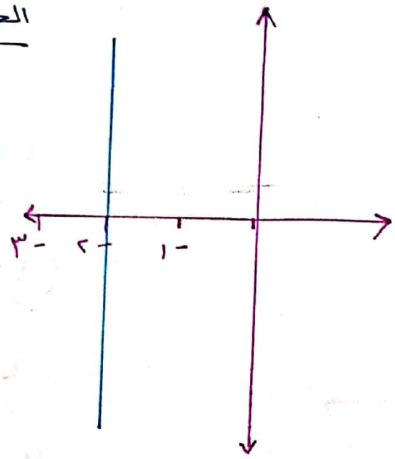
١) ق(س) = ٣

الحل:



٢) ق(س) = -٣

الحل:



← الاقتران الخطي : ق(س) = م س + ب

ناخذ نقطتان على الاقتران ونوصل بينهم بخط وذلك من خلال تكوين جدولاً. ونختار هذه نقطتان من محور السينات ونعوضهم في الاقتران ويكون ناتج التعويض في محور الصادات.

(س ، ص) ← النقطة

↙ ق(س)

س	س١	س٢	س٣ ....
ق(س)			

← ناتج تعويض النقطة س في اقترانه ق(س).

مثال (٧) مثل الاقترانات التالية بيانيًا:

[1] ق(س) = س + ٤

[2] ق(س) = س + ٢

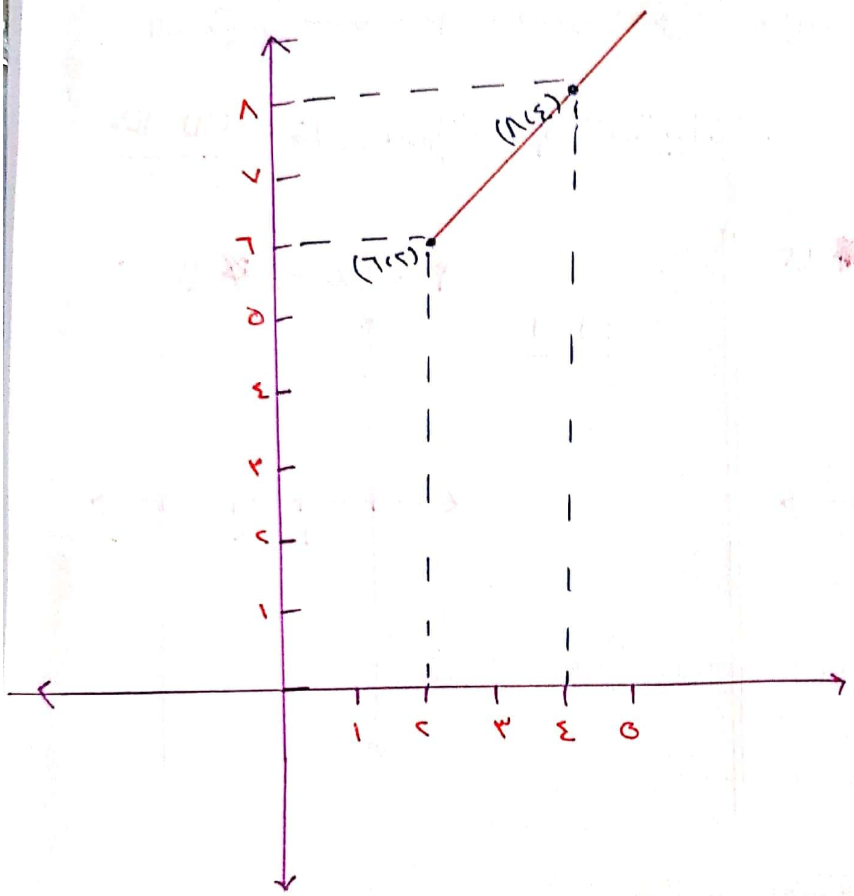
الحل:

[1] ق(س) = س + ٤

س	٢	٤
ق(س) = ص	٦	٨

← عندما س = ٢
ق(٢) = ٦
النقطة (٢، ٦)
س ص

← عندما س = ٤
ق(٤) = ٨
النقطة (٤، ٨)
س ص

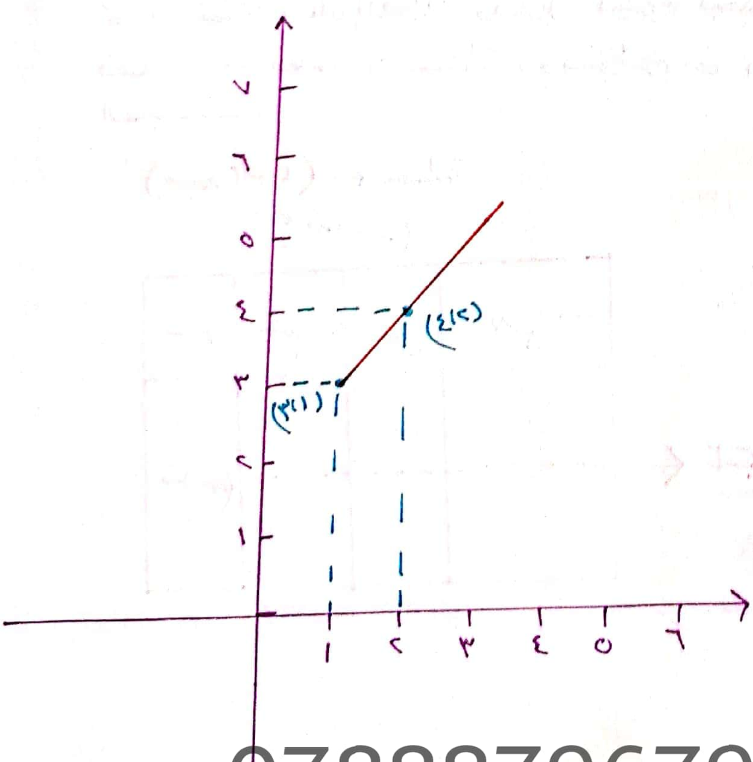


[2] ق(س) = س + ٢

س	١	٢
ق(س)	٣	٤

← عندما س = ١
ق(١) = ٣
(١، ٣)

← عندما س = ٢
ق(٢) = ٤
(٢، ٤).



← الاقتران التربيعي :-

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$$

نجد مايلي :-

١- نجد معادلة محور التماثل

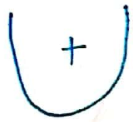
$\text{س} = \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$ ← النقطة التي يبدأ عندها الاقتران بتغيير شكله.

٢- نجد نقطة الرأس.

$$\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} \,،\, \text{ق}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) \right)$$

٣- نأخذ نقطة قبل الرأس ونقطة بعد الرأس.

٤- أ- اذا كان معامل س^2 موجب فإن الاقتران مفتوح للاعلى.



ب- اذا كان معامل س^2 سالب فإن الاقتران مفتوح للاسفل.

مثال (٨) مثل الاقترانات التربيعية التالية.

$\boxed{١}$ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + ١$

$\boxed{٢}$ $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^2 - ٤\text{س} + ٣$

$\boxed{٣}$ $\text{ق}(\text{س}) = ٨ - \text{س}^2 + ٦\text{س}$

الحل

⇐ ١- ق(س) = $\text{س}^{٢}$ + ١

١- س = $\frac{-ب}{٢أ}$

= $\frac{٠}{٢\times١}$ = ٠

٢- نقطة الرأس (٠، ق(٠))

نقطة الرأس (٠، ١)

٣-

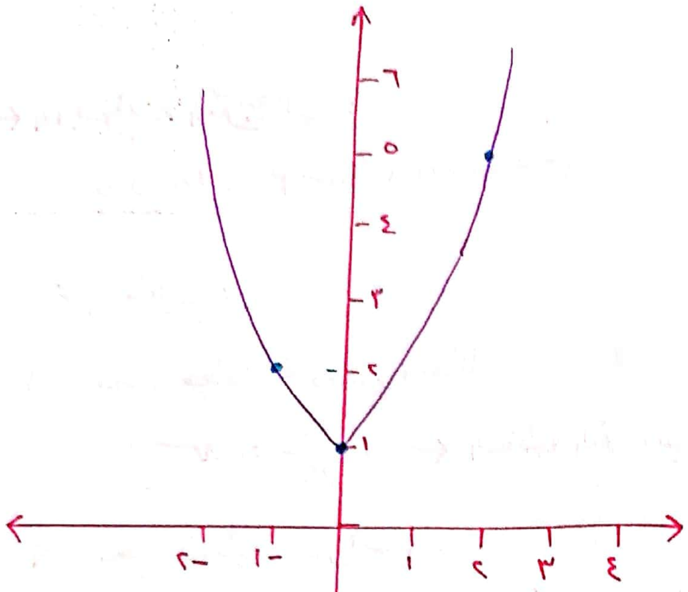
س	-١	٢
ص	٢	٥

⇐ $(-١)^{٢}$ + ١ = ٢

$(٢)^{٢}$ + ١ = ٥

النقاط (-١، ٢)، (٠، ١)، (٢، ٥)

٤- معامل $\text{س}^{٢}$ موجب (+)



⇐ ٣- ق(س) = ٨ - $\text{س}^{٢}$ + ٦س

س = $\frac{-٦}{-٢\times١}$ = $\frac{-٦}{-٢}$ = +٣

نقطة الرأس (٣، ق(+٣))

(٣، ١٧)

س	٠	-١
ص	٨	١

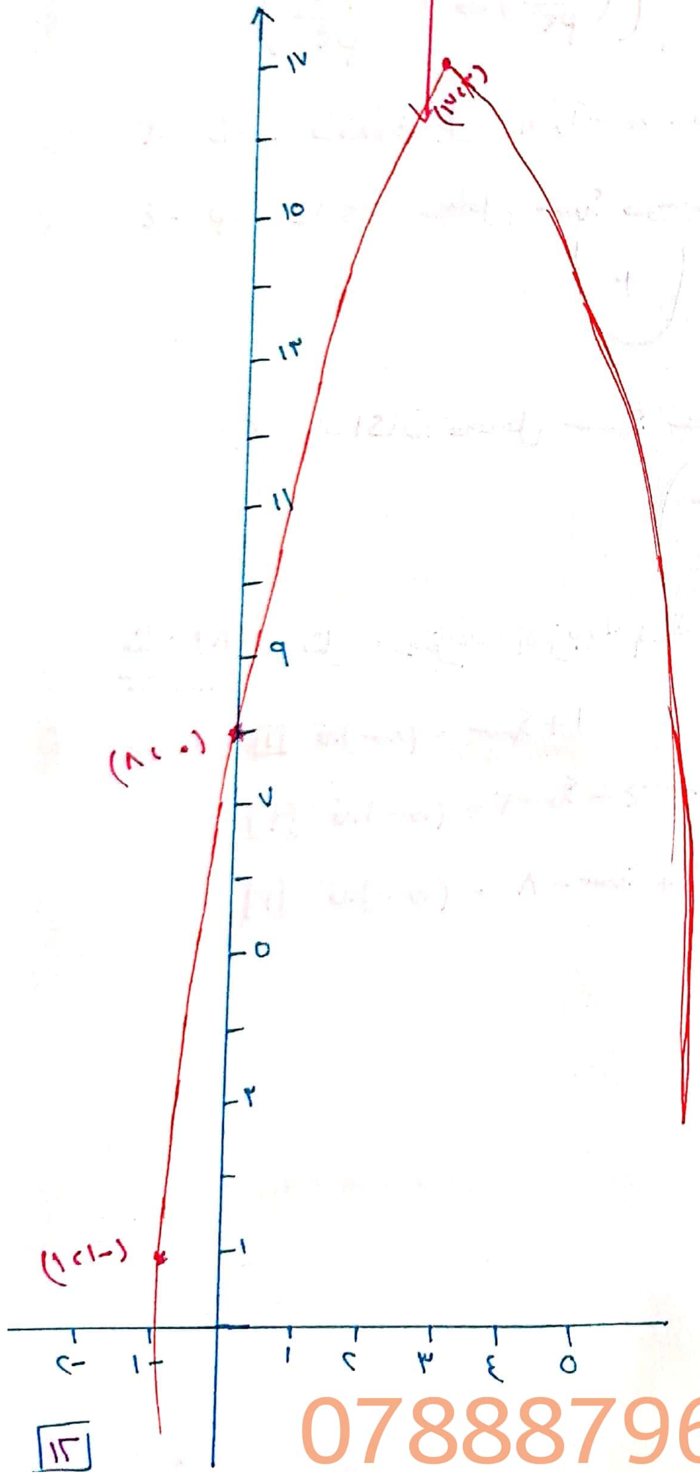
⇐ ٨ - ٠ + ٠×٦ = ٨

٨ - $(-١)^{٢}$ + (٦×-١)

٨ - ١ + -٦ = ١

النقاط (٣، ١٧)، (٠، ٨)، (-١، ١)

معامل $\text{س}^{٢}$ سالب (-)



← **الاقتران التكعيبي** :- اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة وصيغته العامة.

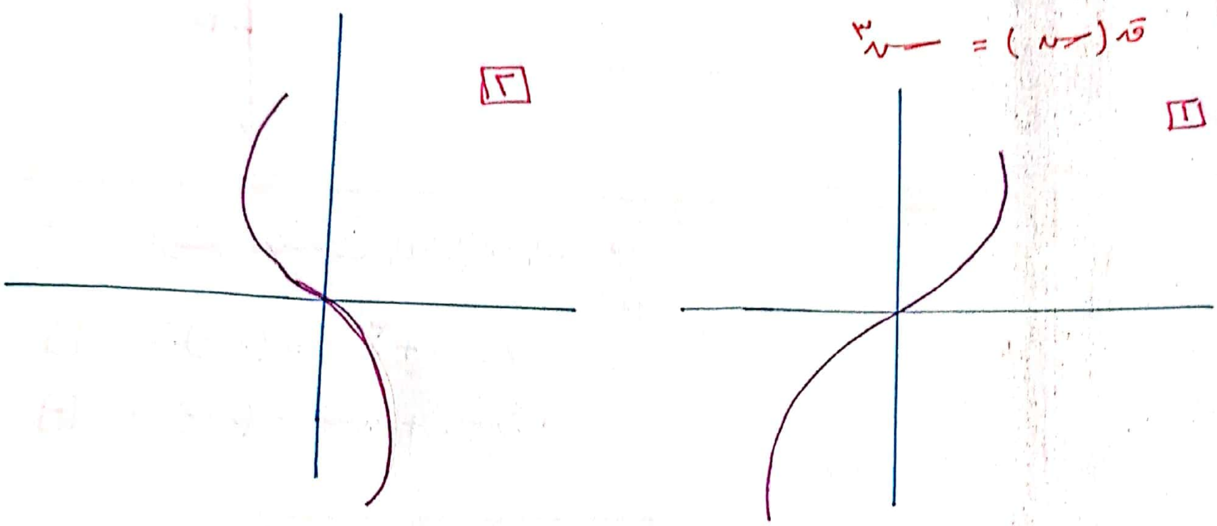
$ق(س) = أ\,س^{٣} + ب\,س^{٢} + جـ\,س + د$ حيث $أ \neq ٠$

مجاله ح ومداه ح

← بعض الرسومات المشهورة لهذه الاقترانات :-

$ق(س) = -س^{٣}$ [٢]

$ق(س) = س^{٣}$ [١]



مثال (٩) مثل منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣} - ٤س$.

الحل :- يمكن رسم هذا الاقتران بطريقتان الاولى وهي تكوين جدولاً . أو باستخدام الطريقة التالية.

نجد اصفار الاقتران

$س^{٣} - ٤س = ٠$

$س(س^{٢} - ٤) = ٠$

أما $س = ٠$

$س^{٢} - ٤ = (س - ٢)(س + ٢) = ٠$

او $س = ٢$

$س = -٢$

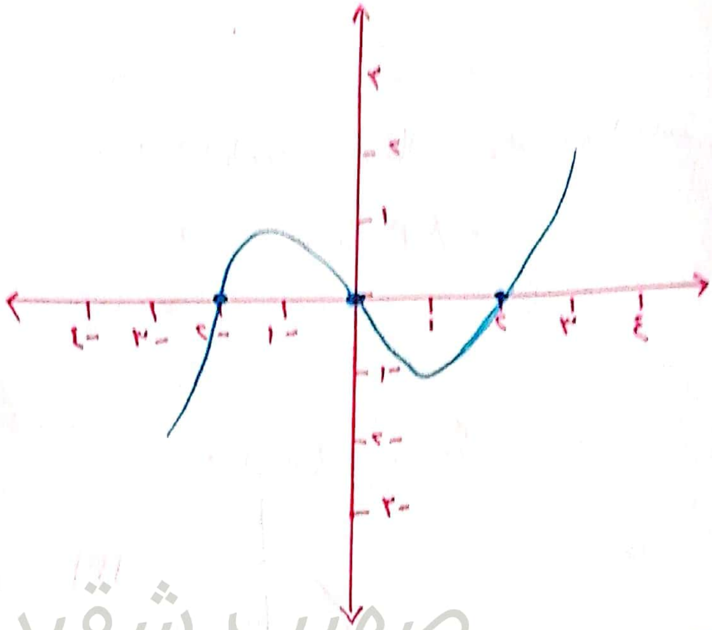
$ق(-١) = (-١)^{٣} - ٤ \times -١$

$= -١ + ٤ = ٣$ موجبة ⇐ فوق محور السينات

$ق(١) = (١)^{٣} - ٤ \times ١$

$= -٣$ سالبة ⇐ تحت محور السينات .

نعين اصفار الاقتران على محور السينات ومعامل $س^{٣}$ موجب ← بالتالي يأخذ الاقتران الشكل التالي :-



تدريب ارسم منحنى الاقترانات التالية.

[١] ق(س) = س^{٣} + ٢

[٢] ق(س) = س^{٣} + ٢س^{٢}.

تحليل كثيرات الحدود.

- الفرق بين مربعين

(س^{٢} - م^{٢}) = (س - م) (س + م)

مثال 16 حلل كل مما يلي الى عواملة الاولية :-

١- س^{٢} - ٩ = (س^{٢} - (٣)^{٢}) = (س - ٣) (س + ٣)

٢- $\frac{١}{٣٦}$ س^{٢} - ٨١ = ($\frac{١}{٦}$ س)^{٢} - (٩)^{٢}

= ($\frac{١}{٦}$ س - ٩) ($\frac{١}{٦}$ س + ٩)

٣- س^{٢} + ٢٥ لا تتحلل لأن مميزها سالب.

٤- (س^{٢} - ٢) = (س - $\sqrt{٢}$) (س + $\sqrt{٢}$)

٥- (س - ١)^{٤} - ٦٤ = ((س - ١)^{٢})^{٢} - (٨)^{٢}

= ((س - ١)^{٢} - ٨) ((س - ١)^{٢} + ٨)

ملاحظه لفك اي قوس تربيعي يتكون من حدين .

$$(س + م)^٢ = س^٢ + ٢م س + م^٢$$

$$(س - م)^٢ = س^٢ - ٢م س + م^٢$$

الاول الثاني .

مهم مربع الحد الاول + ٢ × الحد الاول × الحد الثاني + (الثاني)^٢

مثال (١١)

١- $(س - ٣)^٢ = س^٢ - ٢ × ٣ × س + ٣^٢ = س^٢ - ٦س + ٩$

٢) $(س + ٩)^٢ = س^٢ - ٢ × ٩ × س + ٩^٢$

$= س^٢ + ١٨س + ٨١$

- الفرق ومجموع مكعبين .

$$س^٣ - م^٣ = (س - م)(س^٢ + م س + م^٢)$$

$$س^٣ + م^٣ = (س + م)(س^٢ - م س + م^٢) \leftarrow \text{مربع الثاني}$$

مربع الاول تغير الاشاره الاول × الثاني

ملاحظه العبارة التربيعية الناتجة عن فرق بين مكعبين او مجموع مكعبين لا تحلل ؛ لان مميزها سالب.

ملاحظه - $(\sqrt[٣]{م})^٢ = \sqrt[٣]{م^٢}$

- يمكن تحليل (س - ١) الى فرق بين مكعبين

$$س - ١ = (\sqrt[٣]{س} - ١)((\sqrt[٣]{س})^٢ + \sqrt[٣]{س^٢} + ١)$$

مثال (١٢) حلل مايلي الى العوامل الاولية .

١- $(س^٣ - ٨) = (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)$

٢- $س^٣ + ٢٧ = س^٣ + (٣)^٣$

$= (س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)$

٣- $(س+٢)^٣ - ١٢٥ = (س+٢)^٣ - (٥)^٣$

$= ((س+٢) - ٥)((س+٢)^٢ + ٥(س+٢) + ٢٥)$

- تحليل العبارة التربيعية $أس^٢ + ب س + جـ$

هناك ٣ حالات لتحليل العبارة التربيعية .

$\boxed{١}$ اذا كان (جـ = ٠) نحلل العبارة باخراج عامل مشترك .

← $٣س^٢ - ١٢س = ٣س (س - ٤)$

← $س^٢ - ٣س = س (س - ٣)$

$\boxed{٢}$ اذا كان (ب = ٠) فإن العبارة اما ان تكون فرق بين مربعين او مجموع بن مربعين.

⇐ $س^٢ - ٤ = (س - ٢)(س + ٢)$

⇐ $٢س^٢ - ١٨ = ٢(س - ٣)(س + ٣)$

⇐ $س^٢ + ٨١ =$ لا تتحلل .

⇐ $٩س^٢ + ٤ =$ لا تتحلل .

مثال (١٣) حلل المعادلات التالية :-

١- $٢س^٢ - ٨ = ٠$ ٢- $٢س^٢ - ٩$ ٣- $٥س^٢ + ٢$ ٤- $س^٢ - ٦س$

٥- $\frac{س^٢ - ٣س}{٥}$ ٦- $٥س^٢ + ٢س - ٣$ ٧- $٣س^٢ - س - ٢$ ٨- $٦س^٢ + س - ٢$

الحل :-

١- $٢س^٢ - ٨ = ٠$

$\frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}} = \frac{٨}{٢}$

$س^٢ = ٤$

$س = ±٢$

٢- $٢س^٢ - ٩ = ٠$

$\cancel{٢}س^٢ = \frac{٩}{٢}$

$س^٢ = \frac{٩}{٢}$

$س = \pm \frac{٣}{\sqrt{٢}}$

٣- $٥س^٢ + ٢ = ٠$

لا تحلل مميزها سالب .

٤- $س^٢ - ٦س = ٠$

$س(س - ٦) = ٠$ اخراج عامل مشترك س .

اما $س = ٠$ او $س = ٦$

٥- $\frac{س^٢ - ٣س}{٥} = \frac{٠}{١}$

$س^٢ - ٣س = ٠$

$س(س - ٣) = ٠$

اما $س = ٠$ او $س = ٣$

٦- $٥س^٢ + ٢س - ٣ =$

$(٥س - ٣)(س + ١)$

٧- $٣س^٢ - س - ٢ =$

$(٣س + ٢)(س - ١)$

٨- $٦س^٢ + س - ٢ =$

$(٣س + ٢)(٢س - ١)$

⇐ $٢س^٢ - س - ٣ = ٠$

$(٢س - ٣)(س + ١)$

$-٣س$

$+٢س$

$-س$ ← الحد الاوسط .

ملاحظة تحليل ثلاثي الحدود ومعامل $س^2 \neq 1$

$أ س^2 + ب س + جـ = 0$

- نجد حاصل ضرب $أ \times جـ$ ثم نحلل العدد الناتج
- نستخدم تغير الاشارات بحيث يكون ناتج جمع العددين مع العددين = الحد الاوسط.

في حالة : لم نتمكن من التحليل باستخدام الطرق السابقة نلجأ للمميز والقانون العام

المميز $\Delta = ب^2 - 4 أ جـ$

- المميز > 0 يوجد للمعادلة حلان مختلفان
- المميز $= 0$ يوجد للمعادلة حلان متساويان
- المميز < 0 لا يوجد للمعادلة حلول.

في حالة المميز ≥ 0 نجد اصفار الاقتران باستخدام القانون العام

$$س_{1,2} = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

← يمكن استخدام :- البحث عن عددان حاصل ضربهم يعطي الحد الاخير وجمعهم يعطي الحد الاوسط.

مثال (14) استخدم القانون العام لحل كل من المعادلات الاتية:-

1- $س^2 + س - 3 = 0$

الحل $\Delta = ب^2 - 4 أ جـ$

$= (1)^2 - 4 \times 1 \times -3$

$= 1 + 12 = 13 > 0$ تحلل

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2 أ}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

٢- $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

أ $= ١$
ب $= -٦$
جـ $= ٩$

$\Delta = (-٦)^٢ - ٤ \times ١ \times ٩$
$= ٠$

$س_{١،٢} = \frac{٦ \pm \sqrt{٠}}{٢} = ٣$

٣- $س^٢ - ٤س + ٩ = ٠$

أ $= ١$
ب $= -٤$
جـ $= ٩$

$\Delta =$ ب$^٢ - ٤$أجـ
$= ١٦ - ٤ \times ١ \times ٩$
$= ١٦ - ٣٦$
$= -٢٠ < ٠$ لا تحلل مجموعة الحل
$\emptyset$

تحليل اقترانات من الدرجة الثالثة فأكثر

١- القسمة الطويلة :-

حسب نظرية الأصفار النسبية فان الاصفار النسبية المحتملة للاقتران ق(س) هي عوامل الحد المطلق ونحصل على القوس الاخر من القسمة التركيبية.

مثال (١٥) $س^٣ + ٢س^٢ - ٣$

نجد عوامل الحد -٣ ، ± ١ ، ± ٣

بالتجريب نبحث عن صفر الاقتران (احد الاصفار) الاقتران.

نجد انه $س = ١$

$\Leftarrow$ $س - ١$ احد عوامله.

$$\begin{array}{r|l} س^2 + 3س + 3 & \\ \hline س^3 + 3س^2 - 3 & س - 1 \\ -(س^3 - س^2) & \\ \hline 3س^2 - 3 & \\ -(3س^2 - 3س) & \\ \hline -3 + 3س & \\ -(3س - 3) & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

٢- القسمة التركيبية.

في هذه الحالة نجد الاصفار المحتملة وذلك بايجاد عوامل الحد المطلق وعوامل الحد الرئيسي، حيث ان الاصفار المحتملة = $\frac{\text{عوامل المطلق}}{\text{عوامل الرئيسي}}$:

← ومن خلال التجريب نبحث عن صفر حقيقي للاقتران من خلال الاصفار المحتملة فإذا كان العدد (م) صفر للاقتران قد فإن الاقتران قد يقبل القسمة على (س − م) أي انه باقي القسمة سيكون صفراً.

مثال (١٦) ١) $ق(س) = س^3 - 3س^2 + 4$

الحل: الاصفار النسبية المحتملة للاقتران ق(س) هي ±١، ±٢، ±٤

بالتجريب ق(−١) = ٠

∴ (س + ١) من العوامل

$\boxed{-1}$

س³	س²	س	ثابت
١	−٣	٠	٤
	−١	٤	−٤
١	−٤	٤	٠

$ق(س) = (س + 1)(س^2 - 4س + 4)$

$= (س + 1)(س - 2)^2$

٢) $ق(س) = س^5 + 1$

بالتجريب س = −١

$\boxed{-1}$

س⁵	س⁴	س³	س²	س	ثابت
١	٠	٠	٠	٠	١
	−١	١	−١	١	−١
١	−١	١	−١	١	٠

$(س + 1)(س^4 - س^3 + س^2 - س + 1)$

٣) ق(س) = س⁴ + ٢س³ + ٣س − ٦

الأصفار النسبية للاقتران ق(س) هي ±١ ، ±٢ ، ±٣ ، ±٦

بالتجريب ق(١) = ٠

∴ (س − ١) من العوامل

	س⁴	س³	س²	س	ثابت
$\boxed{1}$	١	٢	٠	٣	−٦
		١	٣	٣	٦
	١	٣	٣	٦	٠
	س³	س²	س	ثابت	

ق(س) = (س − ١)(س³ + ٣س² + ٣س + ٦)

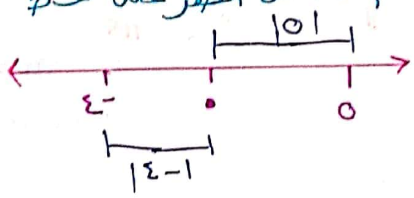
ثانياً : اقتران القيمة المطلقة.

ق(س) = |هـ(س)|

القيمة المطلقة للعدد هي القيمة الموجبة لذلك العدد.

|−٤| = ٤ |٥| = ٥ |٠| = ٠ |٢ − π| = π − ٢

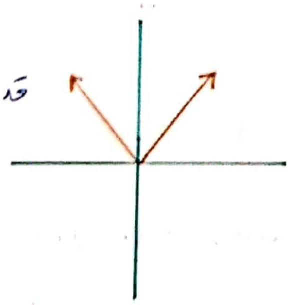
وهي تعني بعد العدد عن الصفر على خط الأعداد.



نلاحظ أن |س| ≥ ٠ وانه:

- |س| = { −س ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠ }

ق(س) = |س|



- |ق(س)| = { ق(س) ، ق(س) ≥ ٠ ؛ −ق(س) ، ق(س) < ٠ }

خطوات إعادة تعريف القيمة المطلقة

١- نساوي ما داخل المطلق بالصفر، ونجد أصفار الاقتران.
٢- نعين الأصفار على خط الأعداد وندرس إشارة الاقتران.
٣- أ- في الفترة الموجبة نأخذ القاعدة الموجبة (ق(س)).
ب- في الفترة السالبة نأخذ القاعدة السالبة (- ق(س)).

مثال (١٧) أعد تعريف كل من الاقترانات التالية :-

١- ق(س) = |س + ١|

الحل :-

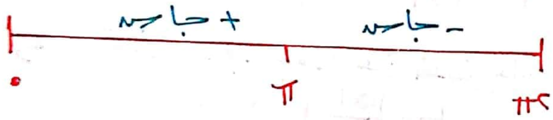
س + ١ = ٠
س = -١

ق(س) = { -(س + ١) ، س < -١
س + ١ ، س ≥ -١ }

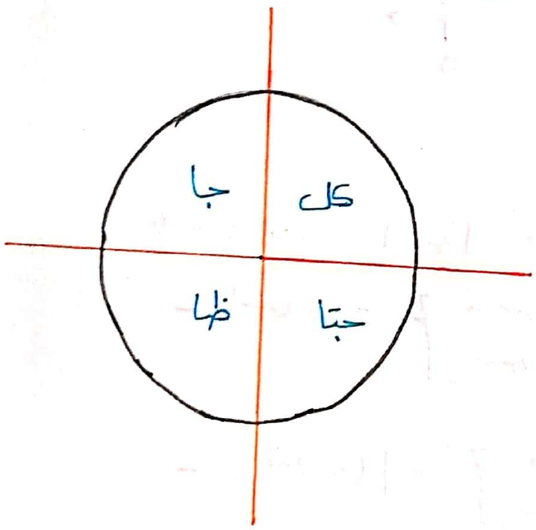
٢- ق(س) = |جاس| ، س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل :-

جاس = ٠



ق(س) = { جاس ، ٠ ≤ س < π
-جاس ، π ≤ س < ٢π }



ملاحظة

٣- ق(س) = |س - ٢|

الحل :

س - ٢ = ٠
س = ٢

ق(س) = { ٢ - س ، س < ٢
س - ٢ ، س ≥ ٢ }

٤- ق(س) = | ٦ - ٢س | ، س ∈ [-١، ٥]

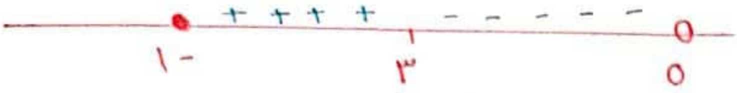
يجب التغير بالفترة عند اعادة التعريف .

الحل :

٦ - ٢س = ٠

$\frac{٢س}{٢} = \frac{٦}{٢}$

س = ٣



ق(س) = { ٦ - ٢س ، -١ ≤ س ≤ ٣
٢س - ٦ ، ٣ ≤ س > ٥

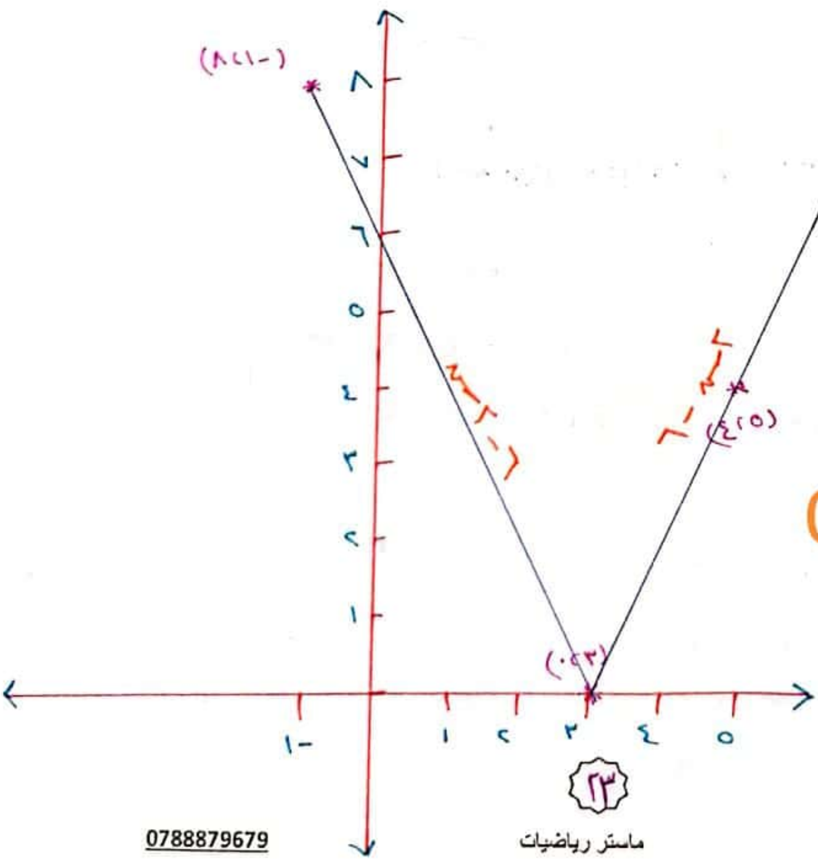
الرسم البياني

٦ - ٢س ، -١ ≤ س ≤ ٣

س	١-	٣
ص	٨	٠

٢س - ٦ ، ٣ ≤ س > ٥

س	٣	٥
ص	٠	٤



5- $ق(س) = س^2 \, |س + 1|$

الحل: نقوم بإعادة تعريف المطلق ثم نضرب في $س^2$

$$\begin{array}{ccc} - - - - & & + + + \\ \hline س^2(-س-1) & -1 & س^2(س+1) \end{array}$$

$س + 1 = 0$

$س = -1$

$$ق(س) = \begin{cases} -س^3 - س^2 & س < -1 \\ س^3 + س^2 & س \geq -1 \end{cases}$$

6- $ق(س) = |س - 2| - |4 - س| + 5$

$|س - 2|$

$$\begin{array}{ccc} - - - & & + + + + \\ \hline 2 - س & 2 & س - 2 \end{array}$$

$|4 - س|$

$$\begin{array}{ccccc} + + + & & + + + & & - - \\ \hline & 2 & 4 - س & 4 & س - 4 \end{array}$$

$|س - 2| - |4 - س|$

$$\begin{array}{ccccc} \hline (2 - س) - (4 - س) + 5 & 2 & (س - 2) - (4 - س) + 5 & 4 & (س - 2)(س - 4) + 5 \end{array}$$

$$ق(س) = \begin{cases} 2 - س - 4 + س + 5 & س < 2 \\ س - 2 - 4 + س + 5 & 2 \leq س < 4 \\ س - 2 - س + 4 + 5 & 4 \leq س \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} 3 & س < 2 \\ 2س - 1 & 2 \leq س < 4 \\ 7 & 4 \leq س \end{cases}$$

خواص القيمه المطلقة.

١- اذا كان $|ق(س)| = أ$

فإن $ق(س) = أ$ او $ق(س) = -أ$

تسمى معادلة القيمة المطلقة.

٢- اذا كان $|ق(س)| \leq أ$

فإن $-أ \leq ق(س) \leq أ$

٣- اذا كان $|ق(س)| \geq أ$

فإن $ق(س) \geq أ$ او $ق(س) \leq -أ$

٤- $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$ الضرب يوزع.

٥- $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ ايضًا القسمه توزع.

لكن الجمع والطرح لايوزع.

مثال (١٨) جد حل كل المعادلات والمتباينات :

١- $|٢س - ٣| = ٥$

الحل:

$٢س - ٣ = ٥$ او $٢س - ٣ = -٥$

$\frac{٢س}{٢} = \frac{٨}{٢}$ ، $\frac{٢س}{٢} = \frac{-٢}{٢}$

$س = ٤$ ، $س = -١$

٢- $|٤س + ٢| \leq ٦$

الحل

$\frac{-٦}{-٢} \leq \frac{٤س + ٢}{-٢} \leq \frac{٦}{-٢}$

$\frac{-٨}{٤} \leq \frac{٤س}{٤} \leq \frac{٤}{٤} \Leftarrow -٢ \leq س \leq ١$

$[-٢ ، ١]$

٣- $|٤ - ٢س| < ٤$

الحل

$-٤ < ٤ - ٢س < ٤$

$\quad -٤ \qquad -٤ \qquad -٤$

$\frac{-٨}{-٢} < \frac{-٢س}{-٢} < \frac{٠}{-٢}$

$٤ > س > ٠ \qquad (٠،٤)$

ملاحظة من خواص المتباينة ، عند القسمة والضرب لعدد سالب تقلب اشارة المتباينة.

تدريب اعد تعريف كل من مما يلي ، دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

١) $ق(س) = |٢س - ١٦|$

٢) $ق(س) = |س^٢ - ٦س + ٥|$

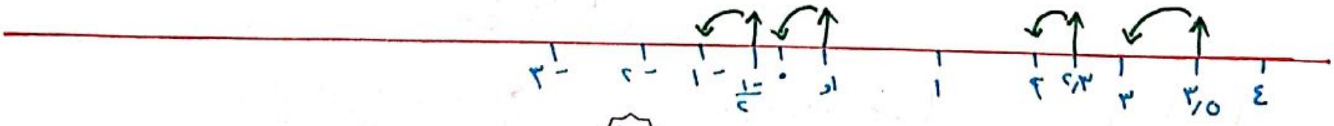
ثالثا : اقتران اكبر عدد صحيح. $ق(س) = [ه(س)]$

صحيح العدد هو اول عدد صحيح اقل من او يساوي ذلك العدد.

$[٣,٥] = ٣ \qquad [٠,١] = ٠ \qquad [-٤] = -٤$

$[٤,٨] = ٤ \qquad [٥] = ٥$

$[\frac{-١}{٢}] = -١ \qquad [٢,٣] = ٢$



ملاحظه

- اذا كان س عدد صحيح فإن [س] = س
- اذا كان س عدد صحيح موجب فإن [س] = |س|

خطوات إعادة تعريف قيمة اكبر عدد صحيح

١- نجد طول الدرجه $ل = \frac{1}{|أ|}$

٢- نجد نقطة الارتكاز : $أ\,س + ب = 0 \leftarrow س = \frac{-ب}{أ}$

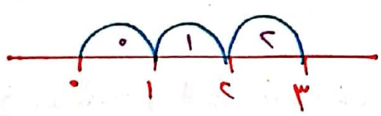
٣- نضع اشارات المساواه للفتره الجزئيه من اليمين اذا كان معامل س موجب ومن اليسار اذا كان معامل س سالب

٤- نجد قيم الاقتران لكل فترة وذلك بتعويض العدد المجاور للمساواه في كل فترة من الاقتران الاقتران.

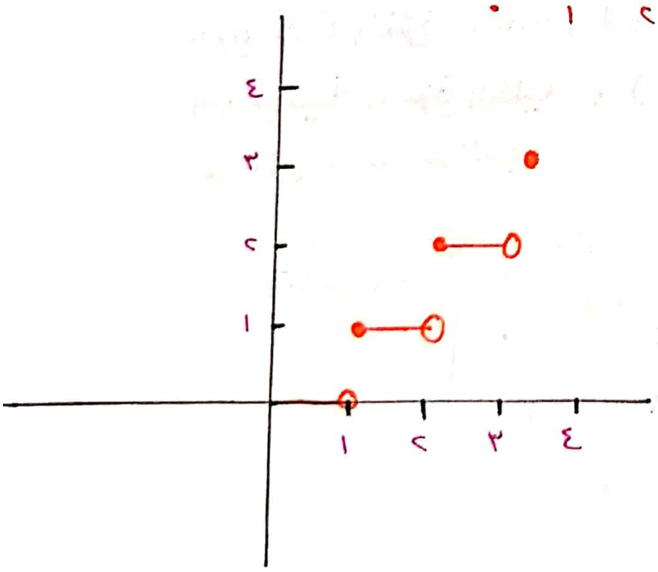
مثال (١٩) اعد تعريف كل من الاقترانات التالية.

١) ق(س) = [س] ، س ∈ [٠، ٣]

الحل:- ل = ١ ، س = ٠

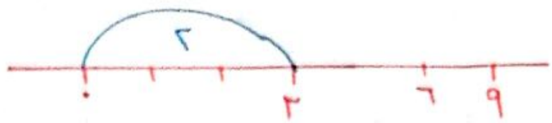


$$ق(س) = \begin{cases} 0 & 0 \le س < 1 \\ 1 & 1 \le س < 2 \\ 2 & 2 \le س < 3 \\ 3 & س = 3 \end{cases}$$



٢) $ق(س) = [\frac{1}{3}س + ٢]$ ، $س \in [٠ ، ٩]$

الحل: $ل = \frac{1}{\frac{1}{3}} = ٣$



$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & ٠ \le س < ٣ \\ ٣ & ٣ \le س < ٦ \\ ٤ & ٦ \le س < ٩ \\ ٥ & س = ٩ \end{cases}$$

0788879679

٣) $ق(س) = [\frac{٣ - س}{٢}]$ ، $س \in [١ ، ٥]$

الحل: $ل = \frac{1}{|\frac{-1}{2}|} = ٢$ نبدأ التجزئه من صفر الاقترانه

الحد المطلق $\frac{٣}{٢}$ عدد غير صحيح ، لذلك نجد صفر الاقتران

$\frac{٣}{٢} - \frac{1}{2}س = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٢} = \frac{1}{2}س \Leftarrow \boxed{س = ٣}$ لذلك نبدأ الفترة $٣ < س < ٥$

وهي تكون الفترة الكلية لذلك نتوقف عندها ونعود للفترات الى الخلف للوصول الى بداية الفترة الكليه ← $(١ < س < ٣)$ ونضع اشارة المساواه في اليسار لأن معامل س سالب.

$$ق(س) = \begin{cases} ١ & س = ١ \\ ٠ & ١ < س \le ٣ \\ -١ & ٣ < س \le ٥ \end{cases}$$

ملاحظة من خواص [س] : اذا كان م عدداً صحيحاً (م ∈ ص) فإن
[س + م] = [س] + م .

مثال (٣٠) [س + ٦] = [س] + ٦ ، [٤س + ٣] = [٤س] + ٣

[س + ١,٣] ≠ [س] + ١,٣

وايضاً اذا كان م ∈ ص وكان [س] = م فإن م ≤ س < م + ١

مثلاً اذا كان [س] = ٩

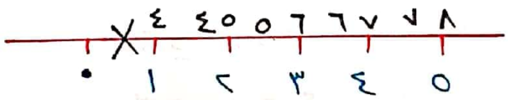
فإن ٩ ≤ س < ١٠

مثال (٣١) أعد تعريف الاقتران التالي : ق(س) = [س + ٣] + [٥ − س] ، س ∈ [١، ٥]

الحل : نعيد تعريف كل اكبر عدد صحيح على خط اعداد مستقل ثم نجمع النواتج المتناظرة . لأن العملية بينهما جمع .

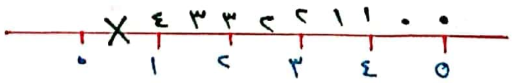
[س + ٣]

ل = ١ ، نبدأ من الصفر لان ٣ عدد صحيح لكن الفترة من ٠ الى ١ خارج الفترة لذلك نتجاهل .

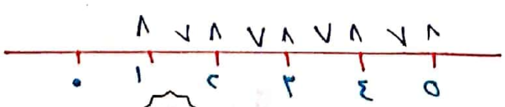


[٥ − س]

ل = ١ ، نبدأ من الصفر لأن ٥ عدد صحيح ولا نحتاج الفترة من [٠، ١] ، ومعامل س سالب لذلك نهاية الفترة هي التي تحدد قيمة الاقتران لكل فترة .



ناتج جمع الفترتين

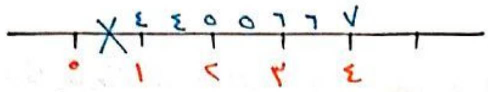


$$ق(س) = \begin{cases} 7 & 1 < س < 2 \\ 7 & 2 < س < 3 \\ 7 & 3 < س < 4 \\ 7 & 4 < س < 5 \\ 8 & س = 1، 2، 3، 4، 5 \end{cases}$$

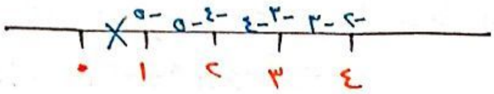
$$ق(س) = \begin{cases} 7 & س \notin ص \\ 8 & س \in ص \end{cases} \quad \text{حيث } س \in [1، 5]$$

مثال (22) $ق(س) = [س+3] - [س-6] ، س \in [1، 4]$

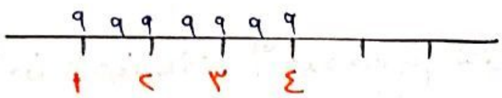
الحل: $[س+3] ، ل = 1$



$[س-6] ، ل = 1$



الناتج



$$ق(س) = \begin{cases} 9 & 1 \le س < 2 \\ 9 & 2 \le س < 3 \\ 9 & 3 \le س \le 4 \end{cases}$$

$= 9$ لجميع $س \in [1، 4]$

∴ الاقتران ثابت.

خواص الاقتران اكبر عدد صحيح ، بعضها :-

١- $أ \in ص \Leftarrow [س \pm أ] = [س] \pm أ$

$[أ - س] \neq أ - [س]$

لذلك يمكن تبسيط الاقتران في المثال السابق مباشرة ، دون اعادة التعريف.

$ق(س) = [\cancel{س}] + ٣ - ([\cancel{س}] - ٦)$

$= ٣ + ٦ = ٩$

٢- $أ \notin ص \Leftarrow$ فإن $[س \pm أ] \neq [س] \pm أ$

٣- $[س] = ن$ ، $ن \in ص$ فإن

$ن \leq س < ن + ١$

0788879679

مثال (٢٣)

١- $[٢س + ٣] = ٥$

الحل :-

$٥ \leq ٢س + ٣ < ٦$
$\quad -٣ \qquad -٣ \qquad -٣$

$\frac{٢}{٢} \leq \frac{٢س}{٢} < \frac{٣}{٢}$

$١ \leq س < \frac{٣}{٢} \Leftarrow س \in [١ ، \frac{٣}{٢})$

٢- $[٢س + ٣] = \frac{٣}{٢}$

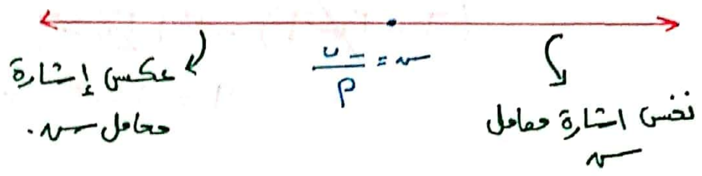
مستحيل ، لانه لايمكن لأكبر عدد صحيح ان يساوي عدد غير صحيح.

دراسة إشارة الاقتران :-

١) الاقتران الخطي :- ق(س) = أ س + ب

- نجد صفر الاقتران

أ س + ب = ٠ ⇐ س = $\frac{-ب}{أ}$ ، ثم نعينه على خط الأعداد.



مثال (٤) ادرس اشارة كل اقتران فيما يلي :-

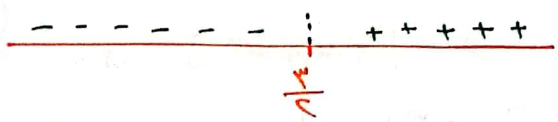
١) ق(س) = ٢س - ٣

الحل :-

٢س - ٣ = ٠

٢س = ٣

س = $\frac{٣}{٢}$



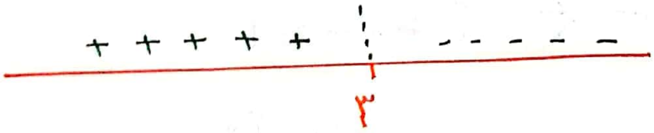
٢) ق(س) = ٩ - ٣س

الحل :

٩ - ٣س = ٠

$\frac{-٣س}{-٣} = \frac{-٩}{-٣}$

س = ٣



٢) الاقتران التربيعي :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{ج}$ ؛ $(\text{أ} \neq ٠)$

← - نجد اصفار الاقتران إن وجدت.

← - اذا وجدت الاصفار تكون الاشارة بين الجذرين عكس إشارة معامل س^2 وخارج الجذرين نفس اشارة معامل س^2.

← - ان لم توجد الاصفار تكون اشارة الاقتران هي اشارة معامل س^2.

نفس الاشارة | س_1 | عكس الاشارة | س_2 | نفس الاشارة

قاعدة

١) اذا كان $\text{س}^2 = \text{أ}$ ، $(\text{أ} \geq ٠)$
فإن $\text{س} = \pm\sqrt{\text{أ}}$ ، حيث س صفر للاقتران.

٢) اذا كان $\text{س}^2 = \text{أ}$ ، $(\text{أ} < ٠)$
فإن لا يوجد حلول للمعادلة.

مثال (٢٥) ادرس اشارة كل من الاقترانات التالية:-

١- $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - ٩$

الحل:

$\text{س}^2 - ٩ = ٠$

$\sqrt{\text{س}^2} = \sqrt{٩}$

$\text{س} = ٣ ، -٣$

+ + | -٣ | − − − − − − | ٣ | + + +

نفس الاشارة | عكس الاشارة | نفس الاشارة

٢- $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + ١$

الحل:

$\text{س}^2 + ١ = ٠$

$\text{س}^2 = -١$

لا يوجد اصفار

+ + + + + + + +

ملاحظة

في حالة كان المعطى معادلة بسط ومقام، نجد اصفار المعادلة في البسط والمقام ثم نضعها على خط الاعداد ثم نختار عدد في كل فترة ونعوضه في الاقتران فتكون اشارة الفترة هي اشارة العدد.

٣) ق(س) = (س − ٢) / (٤ − س)

نبحث في اشارة البسط والمقام كلاً على حده ثم نجد اشارة الفترة المشتركة.

الحل:

س − ٢ = ٠

س = ٢

− − | ٢ | + +

٤ − س = ٠

− س = − ٤

س = ٤

+ + + | ٤ | − −

مجاله [٢ ، ٤)

٤ تم استثنائها لانها صفر الاقتران

− − − − | ٢ | + + + + + | ٤ | − − − −

٤) ق(س) = (س² − ١٦) / (س − ٤)

الحل:

(س² − ١٦) / (س − ٤) = ٠

س² − ١٦ = ٠

√س² = √١٦

س = ± ٤

− − − − | ٤ | + + +

س − ٤ = ٠

س = ٤

+ + + + | −٤ | − − − − | ٤ | + + +

مثال (٢٦) حل المتباينات التالية.

١) س² − س − ٦ ≥ ٠

٢) س³ − ٩س < ٠

الحل:

١) نفرض ان ق(س) = س² − س − ٦ وندرس اشارة الاقتران

ق(س) = (س − ٣)(س + ٢) = ٠

س = ٣ ، س = −٢

∴ س ∈ (-∞ ، -٢] ، [٣ ، ∞)

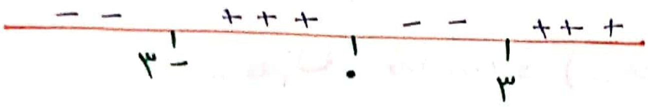
٢) س^٣ - ٩س = ق(س)

ق(س) = س(س^٢ - ٩) = ٠

س = ٠

س^٢ - ٩ = ٠

س = -٣ ، ٣



∴ س ∈ (-∞ ، -٣) ، (٠ ، ٣)

رابعًا : الاقتران الجذري.

ق(س) = ن√(هـ(س))^م ← الجذور نوعان.

[1] الجذور الفردية [مجال الجذر الفردي حسب ما داخل الجذر]

اذا كان [ن] فردي فإن مجال الاقتران ق(س) هو ح.

[2] الجذور الزوجية.

مجال الاقتران الجذري الزوجي هو مجموعة القيم التي تجعل ما داخله موجبًا او صفر

[هـ(س) ≥ ٠]

ملاحظة: عند اجراء اي عملية على الاقتران الجذري الزوجي يجب تحديد مجاله اولًا.

مثال ٢٧: حدد مجال كل مما يأتي :-

١) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}^2 + 2}$

مجالة ح لأن ما داخلة كثير حدود ، حيث ان مجال كثير الحدود ح .

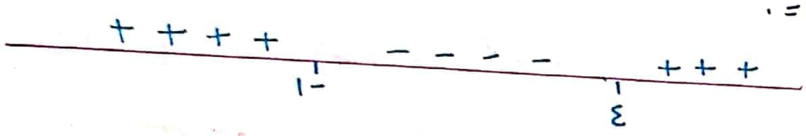
٢) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}$

$\text{س}^2 - 3\text{س} - 4 = 0$

$(\text{س} - 4)(\text{س} + 1) = 0$

$\text{س} = 4$

$\text{س} = -1$



$\therefore$ مجال $\text{ق}(\text{س}) = (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$

٣) $\sqrt[5]{\text{س}^2 - 6}$

بما ان دليل الجذر الفردي سيادي ٥ فإن مجال الاقتران ح

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س} - 2}}{\sqrt{\text{س} + 4}}$

البسط

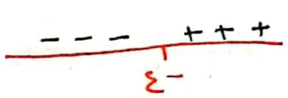
$\text{س} - 2 = 0$

$\text{س} = 2$

المقام

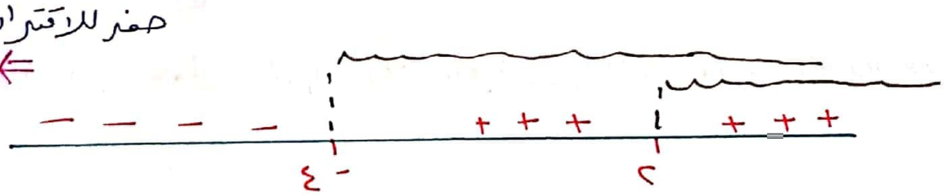
$\text{س} + 4 = 0$

$\text{س} = -4$



-٤ يستثنى من المجال لانه صفر للاقتران

$\Leftarrow$ مجال $\text{ق}(\text{س}) = [2, \infty)$



٥) $ق(س) = \frac{\sqrt{٢٥ - س^2}}{\sqrt{٥ - س}}$

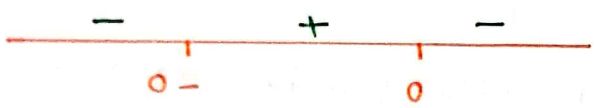
الحل :-

البسط $\sqrt{٢٥ - س^2}$

$٢٥ - س^2 = ٠$

$س^2 = ٢٥$

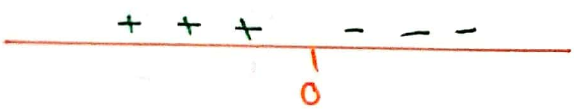
$س = \pm ٥$



المقام $\sqrt{٥ - س}$

$٥ - س = ٠$

$٥ = س$



مجال ق(س) = مجال البسط ∩ مجال المقام − {اصفار المقام}

$= [-٥ ، ٥)$

ملاحظه مجال كثيرات الحدود هو ح وحداه ح او مجموعة جزئيه منها.

خامسًا :- الاقترانات النسبية (الكسرية).

$$ق(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س)} ، ل(س) \neq ٠$$

مجال الاقتران الكسري هو ح - { اصفار المقام }.

مثال (٣٨) حدد مجال كل من الاقترانات التالية.

ملاحظه: في الاقتران النسبي لا يجوز ان يكون المقام صفر لذلك اصفار المقام تكون دائمًا خارج المجال.

١) $ق(س) = \frac{٣س + ٤}{س - ٢}$

نجد اصفار المقام

$س - ٢ = ٠$

$س = ٢$

مجال ق(س) : ح - {٢}

٢) $ق(س) = \frac{٣}{س} - \frac{٢}{س - ١}$

اصفار المقام : $س = ٠$ ، $س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

مجال ق(س) = ح - {٠ ، ١}.

٣) $ق(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ١}$

اصفار المقام : $س^٢ - ١ = ٠$

$س = \pm ١$

مجال ق(س) : ح - {-١ ، ١}

مثال (٢٩) حدد مجال كل من الاقترانات التالية :-

1) $ق(س) = \frac{٢}{س^٢}$

2) $ق(س) = \frac{٤}{س - ٢}$

3) $ق(س) = \frac{٤س}{س^٢ - ٩}$

الحل :

١- اصفار المقام $س^٢ = ٠$ ← مجال ق(س) هو ح - {٠}

٢- اصفار المقام $س - ٢ = ٠$ ← $س = ٢$ ← مجال ق(س) هو ح - {٢}

٣- اصفار المقام $س^٢ - ٩ = ٠$ ← $س = \pm ٣$ ← مجال ق(س) هو ح - {٣ ، -٣}

مثال (٣٠) حدد مجال كل من الاقترانات التالية :-

١) $ق(س) = \frac{\sqrt{س}}{س - ١}$

٢) $ق(س) = \frac{٢س}{\sqrt{٢٥ - س^٢}}$

٣) $ق(س) = \frac{\sqrt{٤ - س}}{س^٢ + ٩}$

٤) $ق(س) = \sqrt{\frac{س - \pi}{س + \pi}}$

الحل :-

١) $\text{س} - 1 = 0$

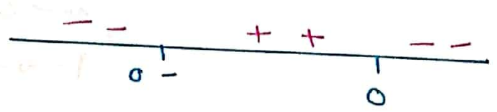
$\text{س} = 1$ ، $\text{س} \geq 0$

مجال $\text{ق}(\text{س})$ هو $[0 ، \infty) - \{1\}$

٢) $25 - \text{س}^2 > 0$. نفرض ان $\text{ل}(\text{س}) = 25 - \text{س}^2 = 0$

$25 = \text{س}^2$

$\text{س} = \pm 5$



مجال هو $(-5 ، 5)$

٣) $4 - \text{س} \geq 0$

$\text{س} \leq 4$

$\text{س}^2 + 9 = 0$

$\text{س}^2 = -9$

لا يوجد اصفار مقام.

مجال هو $= (-\infty ، 4]$

٤) $\text{س} - \pi = 0$

$\text{س} = \pi$

$\text{س} + \pi = 0$

$\text{س} = -\pi$

مجال $\text{ق}(\text{س}) = (-\infty ، -\pi) \cup (\pi ، \infty)$

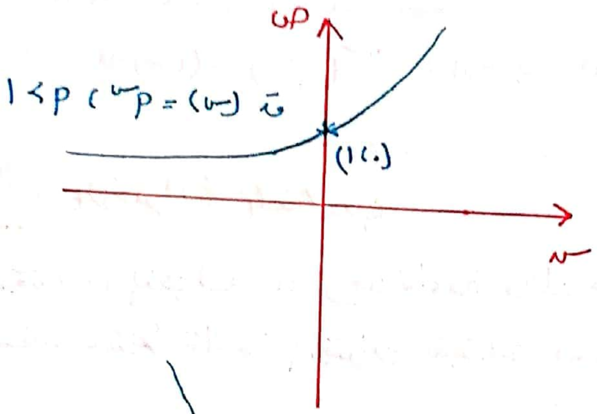
سادساً : الاقتران الأسي

هو اقتران يكون على الصورة التالية   قة(س) = $أ^{هـ(س)}$ ، أ ثابت
(أ > ٠ ، أ ≠ ١)

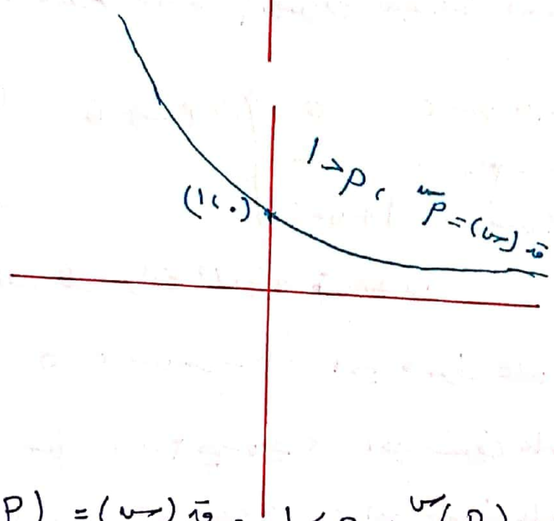
وباختصار شديد هو اقتران المتغير فيه كأس.

وتمثيله البياني كما في الشكلين التاليين :-

عندما أ > ١



عندما أ < ١



والملاحظة: ان كلا من الاقترانين قة(س) = $(أ)^س$ ، أ > ١ وقة(س) = $(أ)^س$ ، أ < ١ يمران بالنقطة (٠،١) لانه عندما س = ٠ فان قة(س) = $أ^٠$ = ١ ، مهما كانت قيمة أ.

مثال (١): قة(س) = $(٢)^س$ اوجد قة(-١) ، قة(٠) ، قة(٣) .

الحل: قة(-١) = $٢^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$.

قة(٠) = $٢^٠$ = ١ .

قة(٣) = $٢^٣$ = ٨ .

مثال (٢) ق(س) = $٤^{٢س+١}$ ، اوجد ق(-١) ، ق(٠) ، ق(٣)

الحل. ق(٠) = $٤^{٢×٠+١}$ = ٤

ق(-١) = $٤^{٢×-١+١}$ = $٤^{-١}$ = $\frac{١}{٤}$

ق(٣) = $٤^{٢×٣+١}$ = $٤^{٧}$

تدريب :- ق(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ ، اوجد ق(-٢) ، ق(٠) ، ق(١) .

سابقاً : الاقتران المتشعب

هو الاقتران الذي له اكثر من قاعدة وكل قاعدة معرفة على مجال معين ، تسمى النقطة التي تتغير عندها قاعدة الاقتران بنقطة تحول تشعب .

مثال (١)

$$ق(س) = \begin{cases} ٥ & ، س < -٣ \\ س & ، -٣ \leq س \leq ٢ \\ ٢س+١ & ، س > ٢ \end{cases}$$

لاحظ ان للاقتران ثلاثة قواعد .

الاولى : ٥ ، س < -٣ اي معرف على الفترة المفتوحة (-∞، -٣)

الثانية : س ، -٣ ≤ س ≤ ٢ اي معرف على الفترة المغلقة [-٣، ٢]

الثالثة : ٢س+١ ، س > ٢ ، اي معرف على الفترة المفتوحة (٢، ∞)

← لايجاد ق(٢) ، ق(٤) ، ق(-٧) نعوض كل منهم بالقاعدة المناسبة فمثلاً ق(٢) توجد في الفترة [-٣، ٢] فيكون ق(٢) = ٢

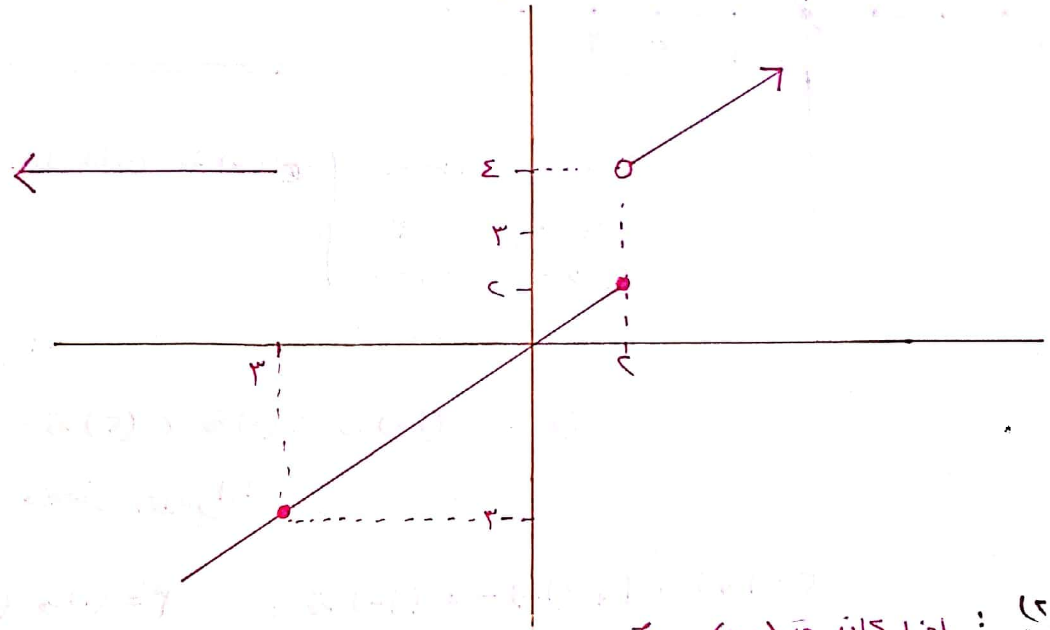
ق(٤) ← توجد في الفترة (٢، ∞) نعوض بالقاعدة الثالثة ⇐ ق(٤) = ٢ × ٤ + ١ = ٩

ق(-٧) ← توجد في الفترة (-∞، -٣) نعوض باول قاعدة

ق(-٧) = ٥ .

ملاحظه. يتم رسم كل قاعدة على حدا بنفس الشكل مع ملاحظه ان اشارة المساواة تعني فترة مغلقه ونحدد بنقاط وظلله وعدم وجودها تعني فترة مفتوحة ونحدد بحلقه (○) بينما اشارة ∞ ، $-\infty$ نوضع سهم دليل انه غير منتهي

لاحظ ان العدد (-٣) هو نقطه تشعب وهو معرف في القاعدة الاولى وغير معرف في القاعدة الثانيه، وكذلك العدد ٢ معرف في القاعدة الثانيه وغير معرف في القاعدة الثالثة.



مثال (٢) : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س & ، س \ge ٠ \\ ١ & ، س < ٠ \end{cases}$

اوجد ما يلي : ① ق(٢) ② ق(٠)

الحل : ١- ق(٢) = ٢×٢ = ٤ لان ٢>٠

٢- ق(٠) = ٢×٠ = ٠ لان س ضمن الفترة الاولى.

٣- ارسم منحنى ق(س)

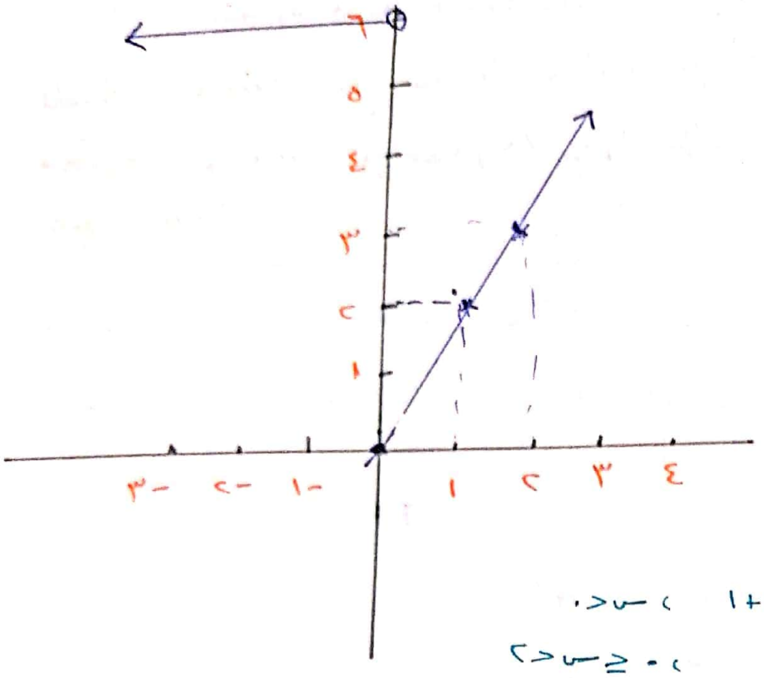
الحل :- نكون جدول لكل قاعدة س ≥ ٠

س	٠	١	٢
ص	٠	٢	٣

س < ٠

س	-١	-٢
ص	٦	٦

دائرة مفتوحة عند القاعدة التي لا يوجد مساواة عندها دائرة مغلقة عند القاعدة التي لا يوجد مساواه عندها.



مثال (٣). اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} -س+١ ، & س<٠ \\ ٣ ، & ٠\le س<٢ \\ س+٢ ، & س\ge ٢ \end{cases}$$

اوجد ما يلي :-

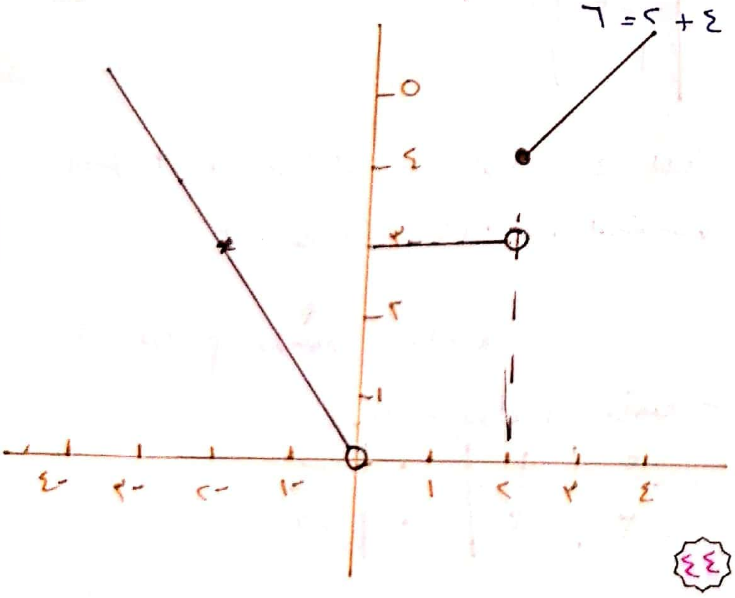
١) ق(١) ، ق(٢) ، ق(٠) ، ق(-١) ، ق(٤)

٢) ارسم منحنى الاقتران

الحل:

١) ق(١) = ٣ ، ق(-١) = -(-١) + ١ = ١+١ = ٢

ق(٢) = ٢+٢ = ٤ ، ق(٤) = ٤ + ٢ = ٦



٢) س < ٠

-س+١

س	-١	-٢
ص	٢	٣

س	٠	١	٢
ص	٣	٣	٣

س ≥ ٢

س	٢	٣	٤
ص	٤	٥	٦

تدريب اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س \leq 0 \\ 5 & ، 0 < س < 4 \\ س + 1 & ، س \geq 4 \end{cases}$ اوجد ق(0)، ق(2) ق(-1) ثم ارسم منحنى ق(س)

تركيب الاقترانات :-

هي عملية رياضية تختص بالاقترانات الحقيقية ، حيث تظهر للوجود اقتراناً جديداً من اقترانين اصليين كما يلي :-

لكن $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = 3س + 5$

فإن (ق ∘ هـ)(س) وتقرأ ق بعد هـ بالنسبة للمتغير س .

اي ان $(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س)) = ق(3س + 5) = (3س + 5)^2$

وهو الاقتران المركب من الاقترانين ق(س) ، هـ(س) وبالترتيب

وأما $(هـ \circ ق)(س) = هـ(ق(س)) = هـ(س^2) = 3س^2 + 5$

وهو الاقتران المركب بين الاقترانين هـ(س) ، ق(س) وبالترتيب فالترتيب مهم جداً .

بصورة عامة :- 1- $(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س))$.

2- $(هـ \circ ق)(س) = هـ(ق(س))$.

مثال (4) اذا كان $ق(س) = 2س$ ، $هـ(س) = \sqrt{س + 1}$ ، جد :

1) $(هـ \circ ق)(س)$ 2) $(ق \circ هـ)(س)$ 3) $(هـ \circ ق)(4)$.

الحل :-

١) $(\text{ق} \circ \text{هـ})(\text{س}) = \text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))$

$= \text{ق}(\sqrt{\text{س}+١})$

$= ٢\sqrt{\text{س}+١}$

٢) $(\text{هـ} \circ \text{ق})(\text{س}) = \text{هـ}(\text{ق}(\text{س}))$

$= \text{هـ}(٢\text{س})$

$= \sqrt{٢\text{س}+١}$

٣) $(\text{هـ} \circ \text{ق})(٤) = \text{هـ}(\text{ق}(\text{س}))$

$= \sqrt{٢\text{س}+١}$

$= \sqrt{٢\times٤+١} = \sqrt{٩} = ٣$

حل نظام معادلات بالحذف او بالتعويض.

أ) حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف :-

مثال حل نظام كل من المعادلات التالية :-

س + ٢ص = ٥ --- ①

٣س - ص = ١ ---- ②

الحل: نضرب المعادلة (٢) بالعدد ٢ ثم اجمع المعادلتين .

(٣س - ص = ١) × ٢

٦س - ٢ص = ٢ --- ②*

اجمع ① و ②*

س + ٢ص = ٥

+ ٦س - ٢ص = ٢

٧س = ٧ ⟸ $\boxed{\text{س} = ١}$

عوض في احدى المعادلات لايجاد قيمه ص المجهوله

عوض في ٢

٣×١ - ص = ١

- ص = -٣ + ١

- ص = -٢

$\boxed{\text{ص} = ٢}$

٢) حل نظام مكون من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات :-

مثال: حل النظام المكون من ثلاث معادلات خطية.

$$\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = ٠ \quad \text{--- ①}$$

$$٢\text{أ} + ٣\text{ب} + ٢\text{جـ} = ٣ \quad \text{--- ②}$$

$$-\text{أ} + ٢\text{ب} - ٣\text{جـ} = -١ \quad \text{--- ③}$$

الحل: نحذف جـ من المعادلتين ١ و ٢ نضرب المعادلة (١) في العدد (٢) ثم نطرح المعادلة ② من ①

$$\cancel{٢\text{أ}} + ٣\text{ب} + \cancel{٢\text{جـ}} = ٣$$

$$\cancel{٢\text{أ}} + ٢\text{ب} + \cancel{٢\text{جـ}} = ٠ \quad -$$

ب = ٣ عوض في (١) وعوض في (٣)

$$\text{أ} + \text{جـ} = -٣$$

$$-\text{أ} - ٣\text{جـ} = -٦ \quad +$$

$$-٢\text{جـ} = -٩ \Leftarrow \text{جـ} = \frac{-٩}{-٢} = \frac{٩}{٢}$$

عوض في (١)

$$\text{أ} + \frac{٣ \times ٢}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٠ \Leftarrow \text{أ} + \frac{١٥}{٢} \Leftarrow \text{أ} = \frac{-١٥}{٢}$$

مثال: حل نظام المعادلات الآتي:

$$\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = ٦ \quad \text{---} \boxed{١}$$

$$٢\text{س} + \text{ع} = ٥ \quad \text{----} \boxed{٢}$$

$$٢\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = ٣ \quad \text{----} \boxed{٣}$$

الحل : نجمع المعادلة ١ و ٣

$$س + \cancel{ص} + ع = ٦$$
$$٢س - \cancel{ص} + ع = ٣$$

$$٣س + ٢ع = ٩ \quad --- \quad \boxed{٤}$$

نضرب المعادلة ٢ بالعدد -٢ ثم نجمع المعادلة $\boxed{٣}$ مع $\boxed{٤}$

$$-٤س - \cancel{٢ع} = -١٠$$
$$+ \quad ٣س + \cancel{٢ع} = ٩$$

$$-س = -١ \Leftarrow س = ١$$

نعوض س = ١ في المعادلة ٤ :

$$٢ \times ١ + ع = ٥$$
$$ع = ٥ - ٢ \Leftarrow ع = ٣$$

نعوض في ①

$$١ + ص + ٣ = ٦$$
$$ص = ٦ - ٤$$
$$ص = ٢$$

ج) حل معادلة خطية واخرى معادلة تربيعية بمتغيرين :-

مثال : $س + ص = ٤ \quad --- \quad ①$

$س^٢ + ص^٢ = ٨ \quad --- \quad ②$

الحل : $س + ص = ٤ \leftarrow ص = ٤ - س$

نعوضها في المعادلة الثانية :

$$س^٢ + (٤ - س)^٢ = ٨$$

$س^2 + 16 - 8س + س^2 = 8$

$س^2 - 4س + 4 = 0$

$(س - 2)^2 = 0$ ⟸ $س = 2$

⟸ $ص = 4 - 2 = 2$

مجموعة الحل : $\{(2, 2)\}$

د) حل معادلتين تربيعيتين بمتغيرين

مثال $س^2 + ص^2 = 13$ .... $\boxed{1}$

$2س^2 - ص^2 = -1$ .... $\boxed{2}$.

الحل طريقة الحذف

$س^2 + ص^2 = 13$

$2س^2 - ص^2 = -1$

$3س^2 = 12$

$س^2 = 4$

$س = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

عند $س = 2$ فإن :-

$4 + ص^2 = 13$

$ص^2 = 13 - 4 = 9$

$ص = \pm 3$

$(2, 3)$ ، $(2, -3)$

عند $س = -2$

$4 + ص^2 = 13$

$ص^2 = 9$

$ص = \pm 3$

$(-2, 3)$ ، $(-2, -3)$

مجموعة الحل :

$\{(2, 3), (2, -3), (-2, 3), (-2, -3)\}$.

ملاحظة

$\boxed{1}$ نجعل ص موضوع القانون في المعادلة $\boxed{1}$

$\boxed{2}$ نعوض المعادلة الناتجة في المعادلة $\boxed{2}$ ثم نجد قيمة المتغير ونعوض قيمته في المعادلة الأولى.

$\boxed{3}$ تسمى طريقة الحل هذه بالتعويض.

المضاعف المشترك الأصغر

لايجاد المضاعف المشترك الاصغر لعددين او مقدارين جبريين نقوم بالتحليل ثم نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة باصغر أس.

أ) المضاعف المشترك الأصغر للاعداد :-

مثال ٤ ، ٦

٤ = ٢ × ٢

٦ = ٢ × ٣

⇐ م.م.أ = ٢ × ٢ × ٣ = ١٢

مثال ٢ ، ٣ ، ٤

٢ = ١ × ٢

٣ = ١ × ٣

٤ = ١ × ٢ × ٢

⇐ م.م.أ = ١ × ٢ × ٣ × ٢ = ١٢

ب) المضاعف المشترك الاصغر للمقادير الجبرية :-

مثال. س² - ٤ ، س² - ٢س

الحل: س² - ٤ = (س - ٢) (س + ٢)

س² - ٢س = س (س - ٢)

⇐ م.م.أ = س (س - ٢) (س + ٢)

مثال س² - ١ ، س² + ٥س - ٦

الحل: س² - ١ = (س - ١) (س + ١)

س² + ٥س - ٦ = (س - ١) (س + ٦)

⇐ م.م.أ = (س - ١) (س + ١) (س + ٦).

العامل المشترك الاكبر:

العامل المشترك الاكبر (ع.م.أ) هو عبارة عن اكبر عدد يقوم بقسمه كلاً من العددين بدون باقي او هو ناتج ضرب العوامل المشتركة لرقمين والتي تمتلك اس اصغر.

١- نحلل كلا العددين الى العوامل الاولية.

٢- تمييز الاعداد المشتركة او العوامل المشتركة.

٣- القيام بضرب العوامل المشتركة ليتم التوصل الى العامل المشترك الاكبر.

مثال: اوجد العامل المشترك الاكبر للعددين ٢٠، ٣٠؟

الحل: نجد عوامل ٢٠، ٣٠ كلاً على حدى

٢٠ = ٢ × ٢ × ٥

٣٠ = ٢ × ٣ × ٥ ⟸ ع.م.أ = ٥ × ٢ = ١٠

مثال: اوجد العامل المشترك الاكبر للعددين ٤٠، ٥٠؟

الحل: ٤٠ = ٢ × ٢ × ٥ × ٢

٥٠ = ٢ × ٥ × ٥ ⟸ ع.م.أ = ٢ × ٥ = ١٠

توحيد المقامات

لتوحيد المقامات نأخذ المضاعف المشترك الاصغر للمقامين كما في الامثلة التالية:-

[١] $\frac{\text{س}+3}{\text{س}+2} + \frac{\text{س}-2}{\text{س}-3} = \frac{(\text{س}+3)(\text{س}-3) + (\text{س}-2)(\text{س}+2)}{(\text{س}+2)(\text{س}-3)}$

$= \frac{2\text{س}^2 - 13}{\text{س}^2 - \text{س} - 6}$

٢) $\left(\frac{س^2+١٢}{س^2-٤} - \frac{س+٢}{س-٢} \right) = \frac{س^2+١٢-(س+٢)(س+٢)}{(س+٢)(س-٢)} = \frac{٨-٤س}{(س+٢)(س-٢)}$

$= \frac{-٤}{س+٢}$

$س^2-٤ = \boxed{(س-٢)}(س+٢)$

$\boxed{(س-٢)} = (٢-س)$

$\Leftarrow م.م.أ = (س-٢)(س+٢)$ ← المقام.

خاصية التوزيع في حالة الجذور والكسور:

١) $\sqrt{أ+ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

$\sqrt{٢+٢} = \sqrt{٤} = ٢ \neq \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$.

٢) $\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

$\sqrt{٣ \times ٣} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \Leftarrow \sqrt{٩} = ٣$

$(\sqrt{٣})^2 = ٣$.

٣) $\frac{أ+ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ}$

$\frac{٢س^2+ص}{س} = \frac{٢س^2}{س} + \frac{ص}{س}$

٤) $\frac{أ \times ب}{جـ} = أ \times \frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ} \times ب$

$\frac{س \times ص}{ع} = س \times \frac{ص}{ع} = \frac{س}{ع} \times ص$

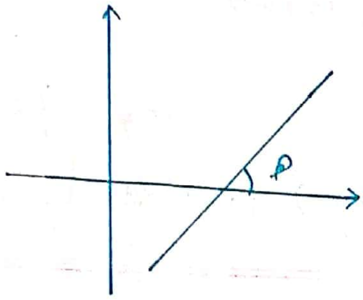
٥) $\frac{جـ}{أ+ب} \neq \frac{جـ}{أ} + \frac{جـ}{ب}$

$\frac{س}{ل+٢} \neq \frac{س}{ل} + \frac{س}{٢}$

٦) $\frac{أ \times ب}{جـ^2} = \frac{أ}{جـ} \times \frac{ب}{جـ}$

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (س١، ص١) ، (س٢، ص٢) هي :-



ص - ص١ = م (س - س١)

حيث م = الميل = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

أيضاً م = ظاهـ ، حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

مثال ١) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (-١، ٢) ، (٣، ٠)

الحل : نجد الميل ، م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٠ - ٢}{٣ - -١} = \frac{-٢}{٣ + ١} = \frac{-٢}{٤} \Leftarrow$ م = $\frac{-١}{٢}$

المعادلة : ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ٢ = $\frac{-١}{٢}$ (س - -١)

ص = $\frac{-١}{٢}$ س $- \frac{١}{٢} + \frac{٢ \times ٢}{٢ \times ١}$ $\Leftarrow$ ص = $\frac{-١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

٢) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ٣) وزاوية ميله تساوي ٤٥° :-

الحل الميل = م = ظا ٤٥ = ١

المعادلة ص - ٣ = ١(س - ٢)

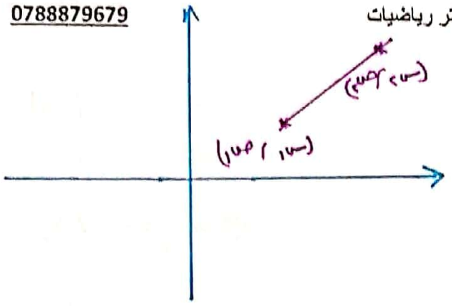
ص = س + ١.

ملاحظة ① المعادلة العامة للمستقيم أس + ب ص + جـ = ٠

هنا الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$.

② اذا كانت معادلة المستقيم بالصورة ص = أس + جـ فإن الميل = معامل س.

قانون المسافة بين نقطتين



$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

مثال اوجد المسافة بين النقطتين (−١، ١) ، (٢، ٤)

س١ ص١ ، س٢ ص٢

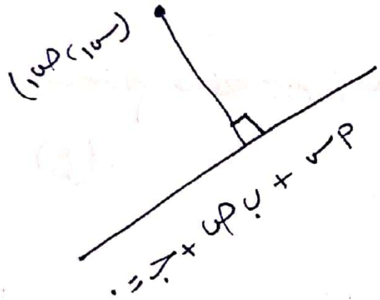
الحل

$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2} = \sqrt{(2 - -1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

مثال اوجد المسافة بين النقاط التالية :-

١- (٤، ٠) ، (−١، ٢)

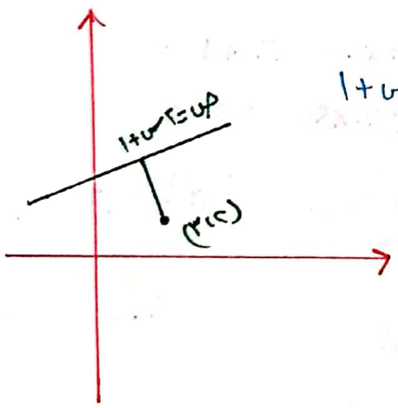
٢- (٣، ٥) ، (٢، −٢)



* المسافة بين نقطة وخط مستقيم:

$$ف = \frac{|أس + ب ص + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

مثال جد المسافة بين النقطة (٢، ٣) والمستقيم ص = ٢س + ١



الحل:

ص = ٢س + ١

ص − ٢س − ١ = ٠

$$ف = \frac{|1 \times 3 - 2 \times 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

التوازي والتعامد

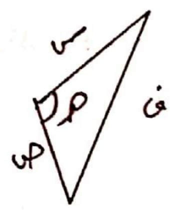
م١ : ميل الأول

م٢ : ميل الثاني

- $ل_1 \parallel ل_2 \iff م_1 = م_2$
- $ل_1 \perp ل_2 \iff م_1 = \frac{-1}{م_2}$

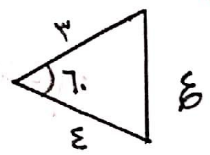
يتعامد مستقيمان اذا كان $م_1 \times م_2 = -1$

قانون جيب التمام



$$ف^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص \text{ جتا } م.$$

مثال باستخدام قانون جيب التمام جد طول ضلع (ع).



الحل:

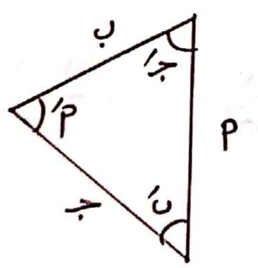
$$ع^2 = (3)^2 + (4)^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \text{جتا } 60$$

$$= 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \text{جتا } 60$$

$$= 25 - 2 \times 12 \times \frac{1}{2} = 25 - 12 = 13$$

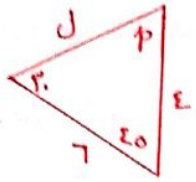
$$ع = \sqrt{13}$$

قانون الجيب



$$\frac{أ}{\text{جا } أ} = \frac{ب}{\text{جا } ب} = \frac{جـ}{\text{جا } جـ}$$

مثال باستخدام قانون الجيب ، اوجد:



١) جيب الزاوية م'　　٢) الضلع ل

الحل :

١) $\frac{٦}{\text{جا م'}} = \frac{٤}{\text{جا ٣٠}}$

$\frac{٦}{\text{جا م'}} = \frac{٤}{\frac{١}{٢}} \Leftarrow \frac{٦}{\text{جا م'}} = ٨ \Leftarrow \text{جا م'} = \frac{\cancel{٦}\,٣}{\cancel{٨}\,٤}$

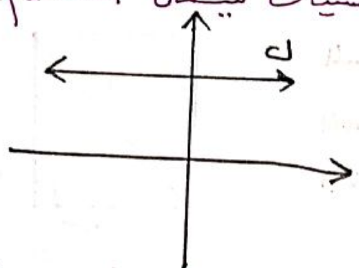
$\text{جا م'} = \frac{٣}{٤}$

٢) $\frac{٤}{\text{جا ٣٠}} = \frac{ل}{\text{جا ٤٥}}$

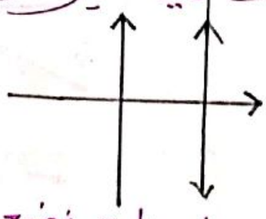
$\frac{٤}{\frac{١}{٢}} = \frac{ل}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} \Leftarrow ل = ٨ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٨}{\sqrt{٢}}$.

معلومات هندسية:

$\boxed{١}$ المستقيم الذي يوازي محور السينات يسمى المستقيم الافقي ويكون ميله يساوي صفر



$\boxed{٢}$ المستقيم الذي يوازي محور الصادات ميله غير معروف (لان الميل = ظا ٩٠ ← كمية غير معرفة).



$\boxed{٣}$ لايجاد نقطة تقاطع الاقتران مع محور السينات نضع ق(س) = صفر او ص = صفر

$\boxed{٤}$ لايجاد نقطة تقاطع الاقتران مع محور الصادات نضع س = ٠ .

$\boxed{5}$ لايجاد نقطة (نقط) التقاطع بين اقترانين نساويهما معاً ق(س) = هـ(س).

$\boxed{6}$ لايجاد التقاطع بين علاقتين ضمنيتين نعوض احدهما في الاخرى.

مثال جد التقاطع بين العلاقتين س^٢ - ص^٢ = ٩ ، س + ص = ٣.

الحل: س + ص = ٣ ⟸ ص = ٣ - س نعوضها في الاولى.

س^٢ - (٣ - س)^٢ = ٩

س^٢ - (٩ - ٦س + س^٢) = ٩

$\cancel{\text{س}^٢}$ - ٩ + ٦س - $\cancel{\text{س}^٢}$ = ٩

- ٩ + ٦س = ٩

٦س = ١٨ ⟸ س = ٣

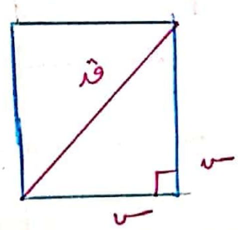
⟸ لكن ص = ٣ - س

= ٣ - ٣ = ٠

⟸ النقطة هي (٣، ٠).

قوانين مساحات والحجوم

١- مربع

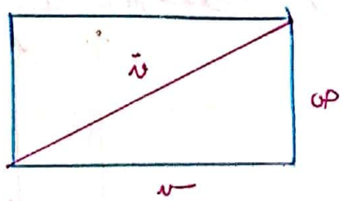


المساحة = (الضلع)^٢ = س^٢

المحيط = ٤س

القطر = ق = $\sqrt{٢\text{س}^٢}$

٢- مستطيل



المساحة = الطول × العرض

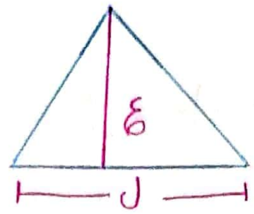
= س × ص

المحيط = ٢(الطول + العرض)

= ٢(س + ص)

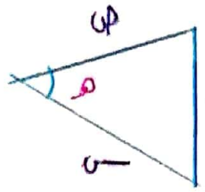
القطر = ق = $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$

٣- مثلث



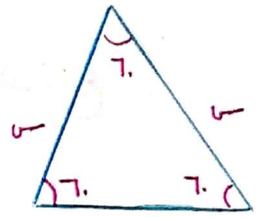
$م = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$= \frac{1}{2}\, ل \times ع$.



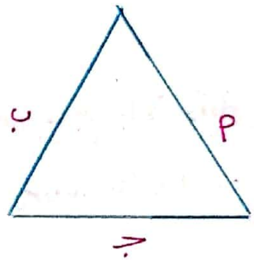
م = نصف حاصل ضرب ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

$م = \frac{1}{2}\, س\, ص\, \text{جا}\, هـ$.



مساحة المثلث المتساوي الأضلاع ⟸ $م = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(\text{طول ضلع})^2$

$م = \frac{\sqrt{3}}{4}\, س^2$.

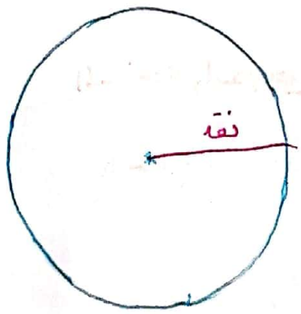


مساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه الثلاث.

$م = \sqrt{ح\,(ح-أ)\,(ح-ب)\,(ح-ج)}$

حيث $ح = \frac{أ+ب+ج}{2}$

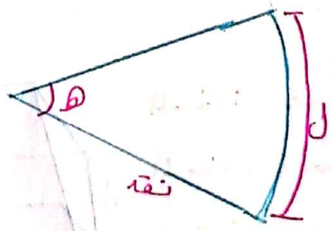
٤- الدائرة



المحيط (ل) = 2π نق

المساحة (م) = π نق^2

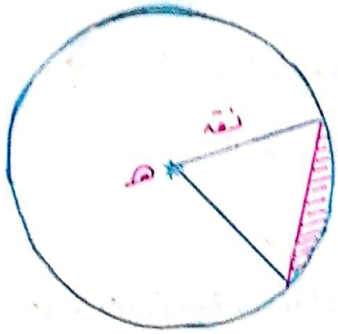
٥- قطاع دائري



ل = نق × هـ

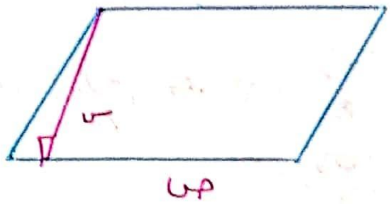
$م = \frac{1}{2}$ نق^2 هـ

٦- قطعة دائرية



م = $\frac{1}{2}$ نق^2 (هـ - جاهـ).

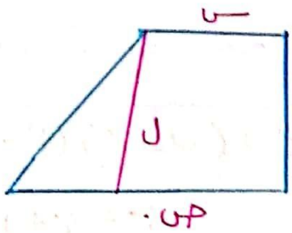
٨- متوازي الاضلاع.



م = القاعدة × الارتفاع

= ب × س

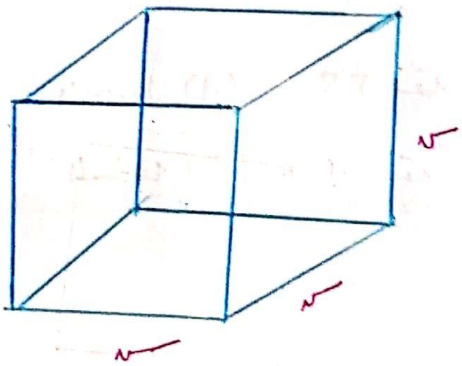
٩- شبه المنحرف



م = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ (س + ب) × ل.

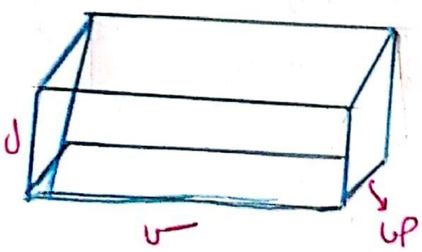
١٠- المكعب



المساحة السطحية = ٦س^2

الحجم = س^3

١١- متوازي المستطيلات



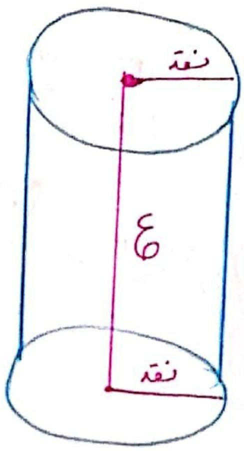
المساحة الكلية =

المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢ (س + ب) ل + ٢ س ب

الحجم = س × ب × ل

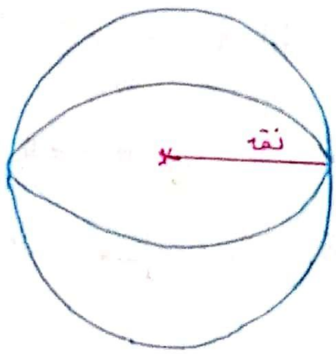
١٢ - الاسطوانة



المساحة السطحية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢π نق ع + ٢π نق^2

١٣ - الكرة

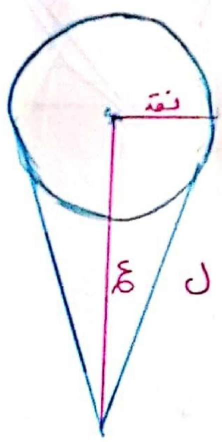


المساحة السطحية

م = ٤π نق^2

الحجم = ح = $\frac{4\pi}{3}$ نق^3

١٤ - المخروط



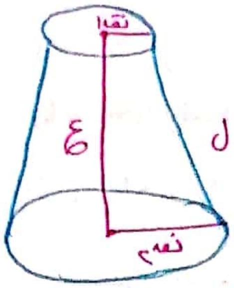
المساحة السطحية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= π نق ل + π نق^2

ل = $\sqrt{\text{نق}^2 + \text{ع}^2}$

الحجم = $\frac{\pi}{3}$ نق^2 ع

١٥- المخروط الناقص:



المساحة الجانبية

م = π ل (نق١ + نق٢)

الحجم

ح = $\frac{\pi}{3}$ ع (نق١² + نق٢² + نق١ نق٢)

١٦- المنشور

هو مجسم له وجهان مضلعان متطابقان ومتوازيان والاوجه الجانبية مستطيلات.

المساحة الجانبية

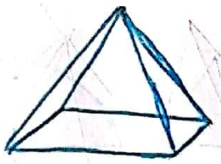
م = محيط القاعدة × الارتفاع

الحجم

ح = مساحة القاعدة × الارتفاع

١٧- الهرم

هو مجسم قاعدته مضلع والاوجه الجانبية مثلثات



م = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع.

العمليات على الاقترانات النسبية

١) طرح الاقترانات النسبية وجمعها.

أ) اذا كان لهما نفس المقام

$$\frac{ق(س)}{هـ(س)} + \frac{م(س)}{هـ(س)} = \frac{ق(س) + م(س)}{هـ(س)}$$

مثال. جد ناتج ما يلي وبينا المجال :-

١) $ق(س) = \frac{س}{س-٣} - \frac{٥}{س-٣}$

$$ق(س) = \frac{س - ٥}{س-٣}$$

المجال : $ح - \{٣\}$

٢) $ق(س) = \frac{س}{س+٧} + \frac{٧}{س+٧}$

$$ق(س) = \frac{س+٧}{س+٧} = ١$$

المجال : $ح - \{-٧\}$

ب) اذا كان لهما مقامين مختلفين

$$\frac{ق}{هـ} + \frac{ك}{د} = \frac{ق \times د \pm ك \times هـ}{هـ \times د}$$

مثال: جد ناتج ما يلي مبينًا المجال:-

١- $ق(س) = \frac{٢س+١}{س-٣} - \frac{س-٢}{س+٧}$

$ق(س) = \frac{(٢س+١)(س+٧) - (س-٢)(س-٣)}{(س-٣)(س+٧)}$

$= \frac{٢س^٢ + ١٤س + س + ٧ - س^٢ + ٢س + ٣س - ٦}{(س-٣)(س+٧)}$

المجال : ح − {٣، −٧}

٢- $ق(س) = \frac{س+٢}{س-١} + \frac{س+٣}{س+٥}$

$ق(س) = \frac{(س+٢)(س+٥) + (س+٣)(س-١)}{(س-١)(س+٥)}$

$= \frac{س^٢ + ٥س + ٢س + ١٠ + س^٢ - س + ٣س - ٣}{(س-١)(س+٥)}$

$= \frac{٢س^٢ + ٩س + ٧}{(س-١)(س+٥)}$

المجال : ح − {١، −٥}

ضرب الاقترانات النسبية

$$\frac{\text{ق}}{\text{هـ}} \times \frac{\text{ك}}{\text{د}} = \frac{\text{ق} \times \text{ك}}{\text{هـ} \times \text{د}} = \frac{\text{البسط} \times \text{البسط}}{\text{المقام} \times \text{المقام}}$$

مثال : جد ناتج مايلي مبينًا المجال :-

١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٣} \times \frac{٥}{\text{س} + ٢}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٥\text{س}}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)}$$

المجال :- ح - {٣ ، -٢}

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٧} \times \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} - ٣}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} + ٧)(\text{س} - ٣)} = \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٥\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ + ٧\text{س} - ٣\text{س} - ٢١} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٢١}$$

المجال : ح - {-٧ ، ٣}

قسمة الاقترانات النسبية.

$$\frac{\text{ق}}{\text{هـ}} \div \frac{\text{ك}}{\text{د}} = \frac{\text{ق}}{\text{هـ}} \times \frac{\text{د}}{\text{ك}} = \frac{\text{ق} \times \text{د}}{\text{هـ} \times \text{ك}}$$

حولنا القسمة الى ضرب

المجال : ح - {اصفار هـ ، د ، ك}.

مثال : جد الناتج للآتي مبينًا المجال :-

1) $ق(س) = \frac{س+1}{س-3} \div \frac{س-5}{س+2}$

$ق(س) = \frac{س+1}{س-3} \times \frac{س+2}{س-5} = \frac{س^2 + 2س + س + 2}{س^2 - 3س - 5س + 15}$

$= \frac{س^2 + 3س + 2}{س^2 - 8س + 15}$

المجال: $ح - \{3 ، 5 ، -2\}$.

2) $ق(س) = \frac{س^2 - 3س}{س^2 - 4س - 5} \div \frac{س^2 - 9}{س^2 - 4س + 3}$

$ق(س) = \frac{س(س-3)}{(س-5)(س+1)} \div \frac{\cancel{(س+3)}(س-3)}{(س+1)\cancel{(س+3)}}$

$= \frac{س\cancel{(س-3)}}{\cancel{(س+1)}(س-5)} \times \frac{\cancel{(س+1)}}{\cancel{(س-3)}} = \frac{س}{س-5}$

المجال : $ح - \{5 ، -1 ، -3 ، 3\}$

اللوغاريتم

تعريف:- لكل $ص \in ن^{+}$ ، $ع \in ن^{+} - \{1\}$

$ص = ع^{س} \iff لو_{ع}\, ص = س$.

الأس

$س = لو_{ع}\, ص \qquad ص = ع^{س}$

العدد

الأساس .

مثال اوجد قيمه $لو_{8}\, 16$

الحل: نفرض ان $لو_{8}\, 16 = س$

$16 = 8^{س}$

نكتب كلا الطرفين بالاساس ٢

$(2)^{4} = (2)^{3س}$

اذا الاساسات متساويه فان الاسس متساوية .

$\frac{4}{3} = \frac{3س}{\cancel{3}}$

$\Leftarrow س = \frac{4}{3}$

$\Leftarrow لو_{8}\, 16 = \frac{4}{3}$

خواص اللوغاريتمات :-

١) خاصية الضرب.

$\text{لو}_{ع}\, \text{م ص} = \text{لو}_{ع}\, \text{م} + \text{لو}_{ع}\, \text{ص}$.

٢) خاصية القسمة.

$\text{لو}_{ع}\, \frac{\text{م}}{\text{ص}} = \text{لو}_{ع}\, \text{م} - \text{لو}_{ع}\, \text{ص}$.

٣) خاصية القوى.

$\text{لو}_{ع}\, \text{ص}^{\text{م}} = \text{م}\ \text{لو}_{ع}\, \text{ص}$.

٤) $\text{لو}_{أ}\, \text{أ} = ١$

٥) $\text{لو}_{أ}\, \text{أ}^{\text{ن}} = \text{ن}$

٦) $\text{لو}_{أ}\, ١ = \text{صفر}$

مثال.

$\boxed{١}$ $\text{لو}_{٢}\, ٨ - \text{لو}_{٢}\, ٤ = \text{لو}_{٢}\, \frac{٨}{٤} = \text{لو}_{٢}\, ٢$

$\boxed{٢}$ $٣\ \text{لو}_{ع}\, \text{س} + \text{لو}_{ع}\, \text{ص} = \text{لو}_{ع}\, \text{س}^{٣} + \text{لو}_{ع}\, \text{ص} = \text{لو}_{ع}\, (\text{س}^{٣}\text{ص})$

$\boxed{٣}$ $٣\ \text{لو}_{٥}\, ٢ + \text{لو}_{٥}\, ٤ - \text{لو}_{٥}\, ١٦ = \text{لو}_{٥}\, ٢^{٣} + \text{لو}_{٥}\, ٢^{٢} - \text{لو}_{٥}\, ٢^{٤}$

$= \text{لو}_{٥}\, (٢^{٣} + ٢^{٢}) - \text{لو}_{٥}\, ٢^{٤}$

$= \text{لو}_{٥}\, \frac{٢^{٣} \times ٢^{٢}}{٢^{٤}} = \text{لو}_{٥}\, ٢$

مثال. اوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث س، ص عددان حقيقيان موجبان.

[١] $لو_{٥} \frac{س}{ص} = لو_{٥} س - لو_{٥} ص$

[٢] $لو(٣س^{٤}) = لو ٣ + لو س^{٤} = لو ٣ + ٤ لو س$

[٣] $لو \sqrt{\frac{٢٥}{س}} = لو \left(\frac{٢٥}{س}\right)^{\frac{١}{٢}}$

$= \frac{١}{٢} لو \frac{٢٥}{س} = \frac{١}{٢} \left(لو ٢٥ - لو س\right)$

$= \frac{١}{٢} \left(لو ٥^{٢} - لو س\right)$

$= \frac{١}{٢} \left(٢ لو ٥ - لو س\right)$

$= لو ٥ - \frac{١}{٢} لو س$. #

تم بحمد الله