الوحدة الثانية

الدائرة

الزوايا في الدائرة

اشترك باليوتيوب على قناتي واعمل لايك للصفحة على الفيس موجود عليها الشرح ورقيا والفيديوهات

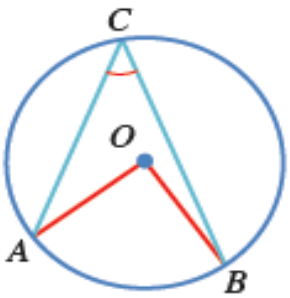
الاستاذ حسين كريشان:

صفحة الاستاذ حسين كريشان:

قروب :الرياضيات مع الاستاذ حسين كريشان

نظرية

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ. $m\angle AOB = 2m\angle ACB$



زاويةٌ محيطيةٌ

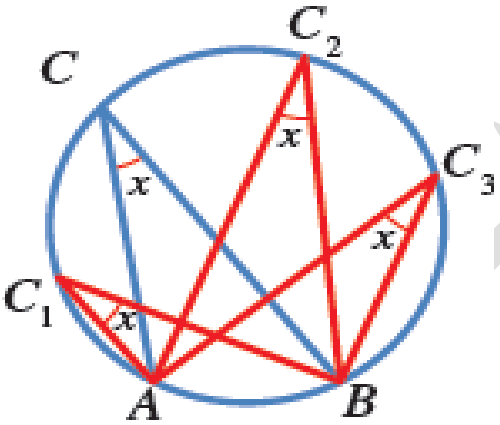
زاوية مركزية

القوسُ المقابلُ

نظرية

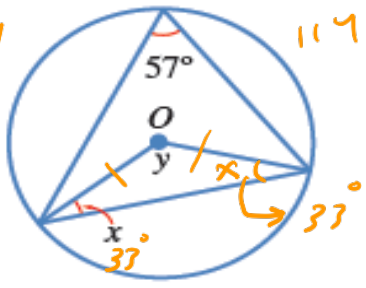
جميع الزوايا المحيطيةُ المرسومةُ على قوسٍ واحدٍ في دائرةٍ لها القياسُ نفسُهُ.

$m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B = m\angle AC_4B$



إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

زاويتا قاعدة المثلث متطابق الضلعين متساويتان في القياس.



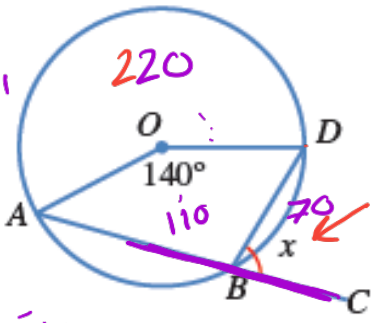
$57 + 57 = 114^\circ$

$\angle y = 2 \times 57 = 114$ محيطية ومركزية القوس نفسه

$\angle x = \frac{180 - 114}{2} = 33$ ① مجموع قياسات زوايا المثلث 180° = ② المثلث متطابق الضلعين (زوايا القاعدة متساوية)

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ x؟



مجموع قياسات الزوايا حول نقطة = 360°

① $a + 140 = 360$

$a = 360 - 140 = 220$

② $\angle DBA = \frac{1}{2} \angle DOA \rightarrow$ AD القوس

$\angle DBA = \frac{1}{2} \times 220 = 110$

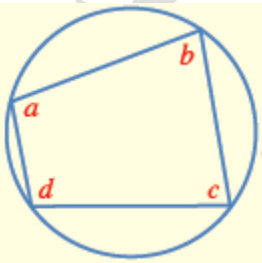
محيطية ومركزية لهما القوس نفسه

$\angle x = 180 - 110 = 70$

قياس الزاوية المستقيمة = 180°

أتذكّرُ

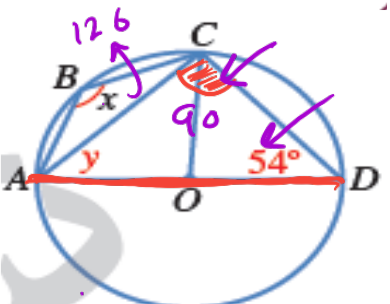
- قياسُ الزاويةِ المستقيمةِ يُساوي $180°$.
- مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ يساوي $360°$.



مجموعُ قياسَيْ كلِّ زاويتَيْنِ متقابلتَيْنِ في المُضلَّعِ الرباعيِّ الدائريِّ هوَ $180°$:

$a + c = 180°, b + d = 180°$.

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟



$\angle x = 180 - 54 = 126$ زاويتان متقابلتان في شكل رباعي دائري

$\angle ACD = \frac{1}{2} \times 180 = 90$ زاوية مرسومة على قطر

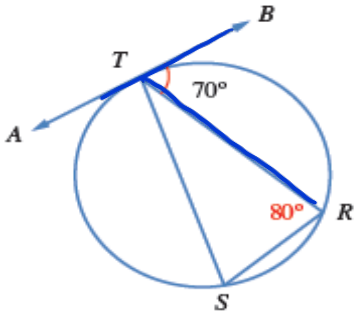
③ $\angle y = 180 - (90 + 54) = 36$

مجموع زوايا المثلث 180

نظرية

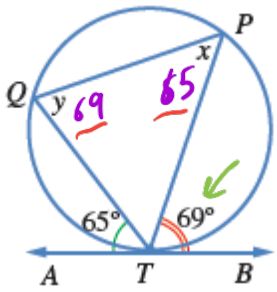
قياسُ الزاويةِ المماسيَّةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها بالقوسِ.

$$m\angle ATB = m\angle ABT$$



في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في T.

أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا: TQP، وَ TPQ، وَ QTP.



Y = ?

X = ?

$\angle Y = 69$ (محاسية ومحيطية لها القوس نفسه)

$\angle X = 65$ محاسية ومحيطية لها القوس نفسه

$QTP = 180 - (69+65) = 46$

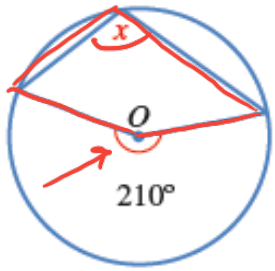
مجموع قياسات زوايا المثلث 180° =

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ مما يأتي:

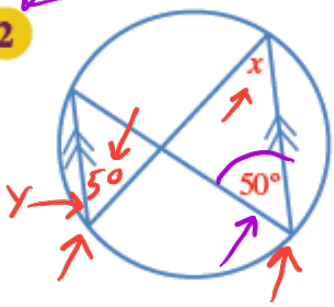
$\angle x = \frac{1}{2} \times 210 = 105$

محاسية ومحيطية لهما القوس نفسه

1



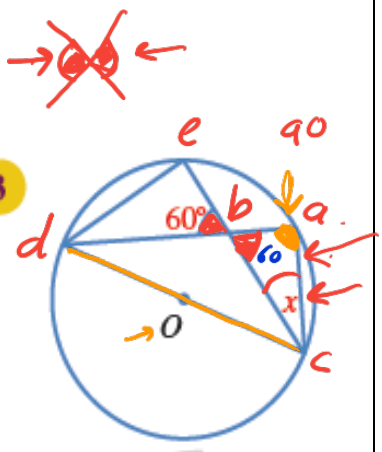
2



$\angle y = 50^\circ$ محيطانه لهما القوس نفسه

$\angle x = \angle y = 50$ تبادل وتوازي

3

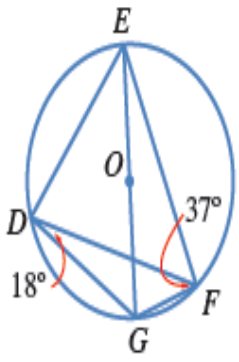


$\angle abc = 60$ تقابل بالرأس

$\angle cad = 90$ زاوية محيطية مرسومة على قطر

$\angle x = 180 - (60 + 90) = 180 - 150 = 30^\circ$

مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$



إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فأَجِدُ كلًّا مما يأتي:

4 $m\angle EGF$. 5 $m\angle DEG$. 6 $m\angle EDF$.

$\angle EFG = 90^\circ$ محيطة مرسومة من فوق قطر

$\angle FEG = \angle FDG = 18^\circ$ محيطيانه على نفس القوس

$\angle EGF = 180 - (90 + 18)$

$= 180 - 108 = 72$

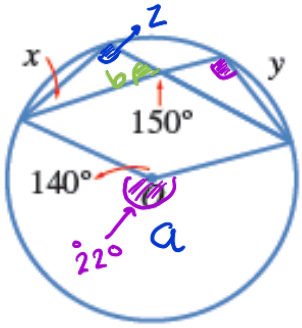
(5) $m\angle DEG = \angle DFG$

محيطانه على نفس القوس

(6) $\angle EDF = \angle EGF = 72^\circ$

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

7



مجموع قياسات الزوايا حول المركز = 360

$\angle a + 140 = 360$

$\angle a = 360 - 140$

$\angle a = 220$

محيطية ومركزية على نفس القوس

$\angle y = \frac{1}{2} \times 220 = 110^\circ$

محيطيتان على نفس القوس

$\angle y = \angle z = 110^\circ$

زاويتان متجاورتان

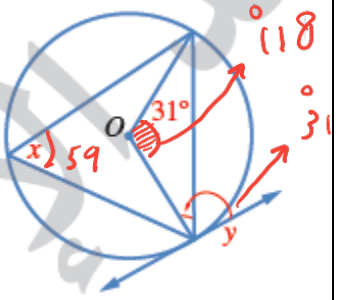
$\angle b = 180 - 150 = 30^\circ$

b = تجاور 15°

$\angle x = 180 - (\frac{110}{2} + 30)$

$\angle x = 40^\circ$

8



مثلث متطابق الضلعين

$\angle y = 31$

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

$\angle aOb = 180 - (31 + 31) = 180 - 62 = 118$

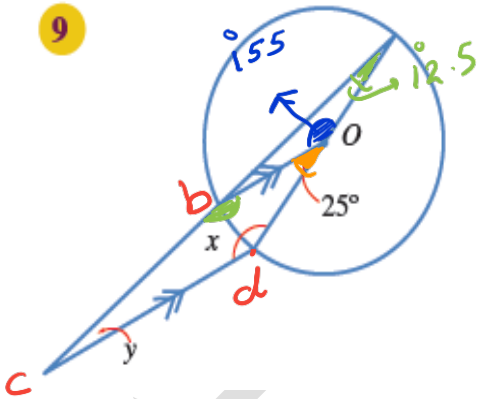
$\angle x = \frac{1}{2} \angle aOb$

$= \frac{1}{2} \times 118 = 59^\circ$

محيطية ومركزية على نفس القوس

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

9



$$\angle oab = \frac{1}{2}\angle boa$$

$$= \frac{1}{2} \times 25 = 12.5$$

$$\angle boa = 180 - 25 = 155^\circ$$

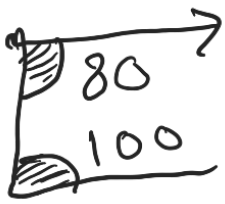
$$\angle abo = 180 - (155 + 12.5)$$

$$= 12.5$$

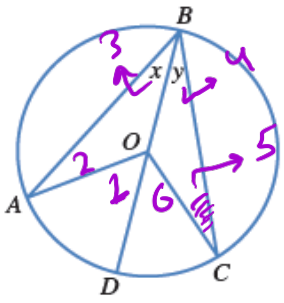
مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle obc = 180 - 12.5 = 167.5^\circ$$

$$\angle y = 180 - 167.5 = 12.5$$



في الشكل المجاور دائرة مركزها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ABO هوَ $x°$،
وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ $y°$:



10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAO.

11 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AOD.

12 أُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ
الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ.

$\angle BAO = \angle x = x$ مثلث متطابق الضلعين

$\overline{OA} = \overline{OB}$ أضلاع أقطار

$\angle AOD = 2(x) = 2x$ محيطية ومركزية على نفس القوس

$\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$ ∠1 زاوية خارجة عن المثلث ABO تساوي مجموع الزاويتين البعيدتين

$\angle 6 = \angle 4 + \angle 5$ — (*)

$\angle 2 = \angle 3$ مثلث متطابق الضلعين

$\angle 4 = \angle 5$

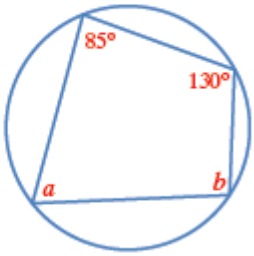
$\angle 1 = \angle 3 + \angle 3 \Rightarrow \angle 1 = 2\ \angle 3$

$\angle 6 = \angle 4 + \angle 4 \rightarrow \angle 6 = 2\ \angle 4$

$\angle 1 + \angle 6 = 2(\angle 3 + \angle 4)$ وهو المطلوب

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

13



شكل رباعي دائري

كل زاويتين متقابلتين مجموعهما 180

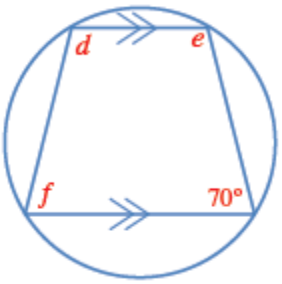
$\angle a + 130 = 180^\circ$

$\angle a = 180 - 130 = 50$

$\angle b + 85 = 180$

$\angle b = 180 - 85 = 95^\circ$

14



زاويتان متحالفتان

$\angle e + 70 = 180$

$\angle e = 180 - 70 = 110^\circ$

$\angle F + \angle e = 180$

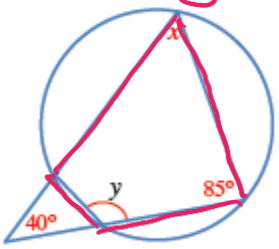
$\angle F = 180 - 110 = 70^\circ$

شكل رباعي دائري

كل زاويتين متقابلتين مجموعهما 180

مجموع قياسات زوايا المثلث

15



$\angle x + 40 + 85 = 180$

$\angle x = 180 - (40 + 85) = 55^\circ$

$\angle y + \angle x = 180$

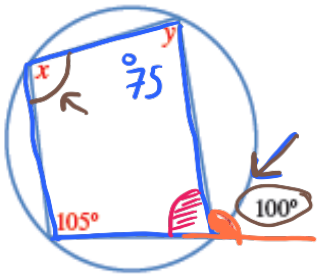
زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري

$\angle y = 180 - 55 = 125^\circ$

180
125
55

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

16



$\angle y + 105 = 180$

شكل رباعي دائري (مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين = 180)

$\angle y = 180 - 105$

$= 75^\circ$

$\angle x = 100^\circ$

$\angle 100 \rightarrow$ زاوية خارجة عن الشكل الرباعي تساوي قياس المقابل للمجاور لها

في الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ $PQRT$، قياسُ الزاويةِ ROQ هوَ 38°، حيثُ O مركزُ الدائرةِ، وَPOT قُطْرٌ فيها. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

17 ROT.

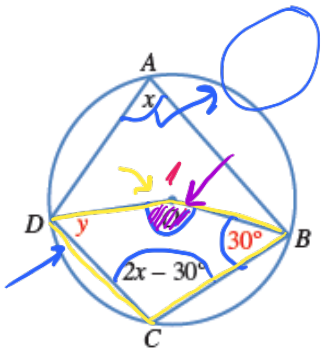
18 QRT.

19 QPT.

الشكلِ المجاورِ دائرة مركزها O:

20 لماذا $3x - 30^\circ = 180^\circ$؟

21 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشارِ إليْها بالحرفِ y، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.



شكل رباعي دائري قياس مجموع كل زاويتين متقابلتين = 180°

$x + 2x - 30 = 180$

(20) $3x - 30 = 180$ وهو المطلوب

(21) $3x - 30 = 180$

$+30 \qquad +30$

$\frac{3x}{3} = \frac{210}{3}$

$x = 70$

الشكل DOBC

$\angle B = 30^\circ$

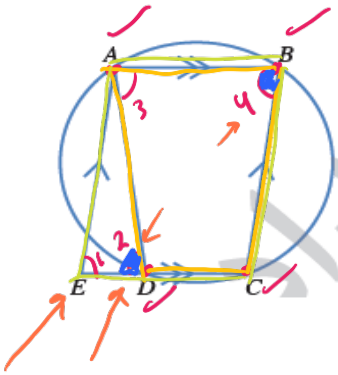
$\angle C = 2x - 30 = 2 \times 70 - 30 = 110^\circ$

$\angle DOB = 2x = 2(70) = 140$

$y + 30 + 110 + 140 = 360$

مجموع قياسات الشكل الرباعي

$y = 360 - 280 = 80^\circ$



22 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $ABCE$ متوازيَ أضلاعٍ: أُبين أنَّ قياسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

الشكل ADCB شكل رباعي دائري

$\angle 2$ خارجة عن الشكل الرباعي

تساوي المقابل للمجاور لها $\angle 2 = \angle 4$ (*)

الشكل ABCE متوازي أضلاع

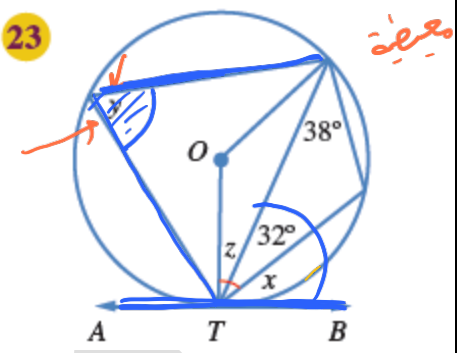
كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متساويتين $\angle 1 = \angle 4$ **

من * و ** $\therefore \angle 1 = \angle 2$

وهو المطلوب

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

23



محيطية

$\angle X = 38$ محاسية ومحيطية على نفس الوتر

$\overline{OT} \perp \overline{AB}$

$\overline{OT}$ نصف قطر — $\overline{AB}$ مماس

$\angle OTB = 90$ نصف قطر عمودي على مماس

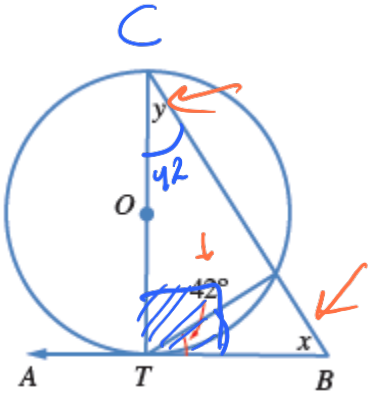
$Z + 32 + X = 90 \rightarrow Z + 32 + 38 = 90$

$Z = 90 - 70 = 20$

$X + 32 = Y$ محاسية ومحيطية على نفس الوتر

$Y = 38 + 32 = 70$

24



24 $\angle Y = 42$ محاسية ومحيطية على نفس الوتر

$\overline{OT}$: نصف قطر ، $\overline{AB}$ مماس

$OT \perp AB$ نصف قطر عمودي على مماس الدائرة

$\angle OTB = 90$

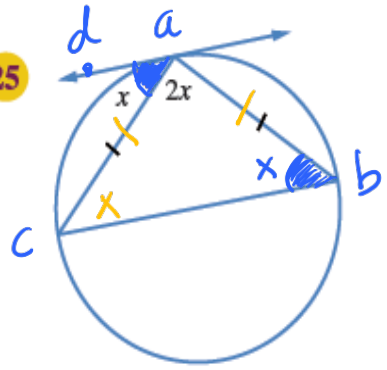
مجموع قياسات زوايا مثلث

$42 + 90 + X = 180$

$X = 180 - 132 = 48$

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ الشكلينِ الآتيينِ:

25



$\angle abc = x$ محاسية ومحيطة على نفس الوتر

$\overline{ab} = \overline{ac}$

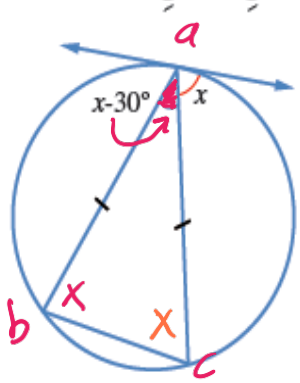
$\angle acb = \angle abc = x$

$x + x + 2x = 180$ مجموع قياسات زوايا المثلث

$\frac{4x}{4} = \frac{180}{4}$

$x = 45°$

26



20

$\angle abc = x$ محاسية ومحيطة على نفس الوتر

$ab = ac$ مثلث متطابق الضلعين

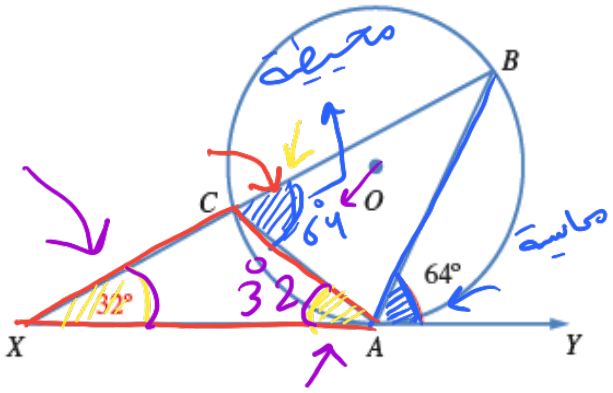
$x + x + x - 30 = 180$ مجموع قياسات زوايا المثلث

$3x - 30 = 180$

$3x = 180 + 30$

$\frac{3x}{3} = \frac{210}{3}$

$x = 70$



27 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ في الشكلِ الآتي، ويُمثِّلُ $\overleftrightarrow{XY}$ مماسًّا للدائرةِ عندَ A. إذا كانَتِ النقاطُ B وَ C وَ X تُمثِّلُ خطًّا على استقامةٍ واحدةٍ، فأُثبِتُ أنَّ المثلثَ ACX مُتطابِقُ الضلعيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي.

$\angle BAY = \angle BCA = 64$ مماسية ومحيطية على نفس القوس

$\angle BCA = \angle CAX + \angle CXA$

$64 = \angle CAX + 32$

$\angle CAX = 64 - 32 = 32$

$\angle CAX = \angle CXA$ متطابقة الضلعين

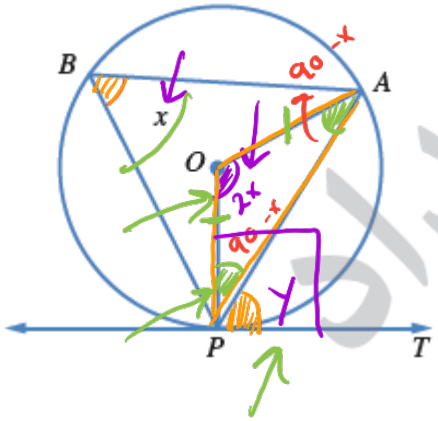
$\overline{CX} = \overline{CA}$ ←

28 **تبريـر:** قالت فاتن أن جميع الزوايـا المحيطية المقابلة لقطر الدائرة تُكوِّن زوايـا قائمة. هل هي على صواب؟ أبرر إجابتي.

نعم لأنه قياس الزاوية المحيطة = نصف قياس الزاوية المركزية

الزاوية المركزية = 180°

قياس الزاوية المحيطة = $\frac{1}{2} \times 180 = 90°$



29 في الشـكل المجاور، $\overleftrightarrow{PT}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ PBA هوَ $x°$:

أُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ APT يساوي قياسَ الزاويةِ ABP . أبرر خطوات الحل.

$\angle AOP = 2x$ محيطية ومركزية على نفس القوس

$\triangle OAP$

$\overline{OA} = \overline{OP}$ أنصاف أقطار

$\angle OAP = \angle OPA$

$\angle OAP + \angle OAP + 2x = 180$

$\angle OPA = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x$

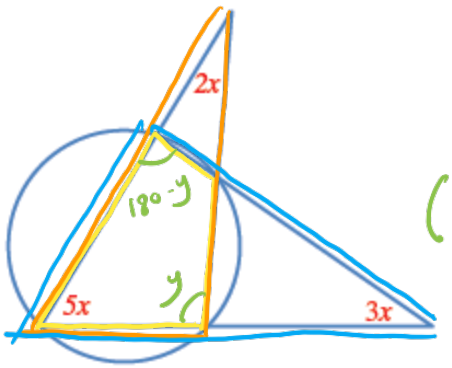
$\overline{OP} \perp pT$ نصف قطر عمودي على المماس

$\angle OPT = 90 \rightarrow 90 - x + y = 90$

$-x + y = 0$ بالطرح

$y = x$

30 تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ.



$(180-y)+y=180$

شكل رباعي دائري
قياس كل زاويتين
متقابلتين = 180

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

① $5x+y+2x=180$

② $5x+3x+180-y=180$

اجمع المعادلتين

$15x+180=360$

$-180 \quad -180$

$\frac{15x}{15}=\frac{180}{15}$

$x=12$