المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

Discrete Random Variable & Binomial Distribution

- التجربة العشوائية : هي التجربه التي تتغير نواتجها من محاوله الى أخرى
- الفضاء العيني : هو مجموعه كل النواتج المكمله للتجربه العشوائيه ويرمز له بالرمز (Ω) أو ميغا

مثال : اكتب الفضاء العيني للتجارب العشوائيه التاليه :

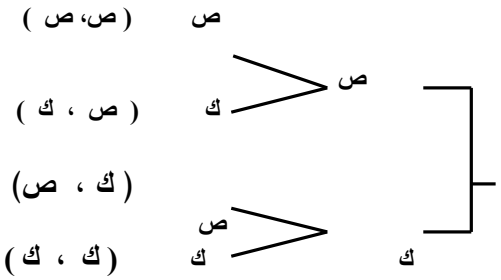
١) القاء حجر نرد مره واحده وملاحظة الوجه الظاهر .

Ω = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }

٢) القاء قطعة النقد مره واحده وملاحظة الوجه الظاهر

Ω = { ص ، ك }

٣) القاء قطعة النقد مرتين متتاليين



Ω = { (ص ،ص)، (ص ،ك) ، (ك ،ص)، (ك ، ك)}

الحادث : هو مجموعه جزئيه من الفضاء العيني ويرمز له بالرمز (ح)

مثال : في تجربة رمي حجر نرد مره واحده اكتب عناصر الحوادث التاليه

١) ح ١ : **ظهور عدد فردي** ب) ح ٢ ظهور عدد زوجي ج) ح ٣ ظهور عدد اكبر من ٥

الحل : Ω = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

أ) ح ١ :={ ١ ، ٣ ، ٥} ، ب) ح ٢ = {٢ ، ٤ ، ٦ } ، ج) ح ٣ = {٦}

احتمال الحادث ل (ح) = عدد عناصر الحادث

عدد عناصر الفضاء العيني Ω

مثال : القاء حجر نرد مرة واحده اكتب عناصر الحوادث التاليه

١) عناصر الفضاء العيني

٢) احتمال الوجه الظاهر يحمل رقم فردي

٣) احتمال الوجه الظاهر يحمل رقم اكبر من ٤

الحل: ١) Ω = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

٢) ح ١ : الوجه الظاهر يحمل رقم فردي ح ١ {١ ، ٣ ، ٥}

$$\text{ل (ح١)} = \frac{\text{عدد عناصر ح ١}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٣}{٦}$$

٣) ح ٢ = {٥ ، ٦ } ⇐ ل (ح٢) = $\frac{٢}{٦}$

تعريف :

المتغير العشوائي هو اقتران معرّف من الفضاء العيني Ω الى مجموعه جزئيه من مجموعه الاعداد الحقيقيه وتستخدم الرموز س ، ص ، ع .....للدلالة على المتغيرات العشوائيه

مثال : في تجربة اختيار عشوائي لعائله لديها طفلان وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولاده .

١) اكتب عناصر الفضاء العيني Ω

٢) اذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد الاطفال الاناث فجد القيم الممكنه للمتغير العشوائي س

الحل : ١) Ω = {(و، و) ، (و، ب) ، (ب ، و) ب ، ب) }

↓ ↓ ↓ ↓

٢) عدد الاطفال الاناث ٠ ١ ١ ٢

س= {٠، ١ ، ٢ }

مثال : اذا دل المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الصوره عند رمي قطعه نقود ثلاث مرات .

(١) اكتب الفضاء العيني للتجربه

(٢) جد القيمه الممكنه للمتغير العشوائي س

(٣) اوجد احتمال كل قيمه من قيم س وكون جدول التوزيع الاحتمالي .

الحل : ١) Ω={(ص ، ص ، ص) ، (ص، ص ، ك) ، (ص ،ك ،ص) ،(ص ،ك ،ك)
(ك ،ص،ص) ،(ك ،ص ،ك) ، (ك ،ك، ص) ،(ك،ك،ك)}

٢) عدد ظهور الصوره اما ٣ صور او صورتان او صوره واحده فقط او من الممكنه ان لا يكون هناك صوره قد ظهر ت

س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

٣) ل (س=٠) = ١/٨ ان لا يكون هناك صور قد ظهرت

ل(س= ١) = ٣/٨ ظهور صوره واحده فقط

ل(س= ٢) = ٣/٨ ظهور صورتان فقط

ل(س= ٣) = ١/٨ ظهور ٣ صور فقط

تدريب١:

جدول التوزيع الاحتمالي هو جدول يربط كل قيمه من قيم س واحتمال حدوثها

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	١/٨	٣/٨	٣/٨	١/٨

تعريف : اذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها متغير عشوائي مجموعه معدودة يسمى المتغير العشوائي متغيراً منفصلاً .

تعريف : يسمى ل اقتران احتمال للمتغير العشوائي المنفصل س الذي ياخذ القيم س١ ،س٢ ،س٣ .....س ن اذا كان

١) ل(س ر) ≥ ٠ ،ر = ١ ، ٢ ، .....، **ن**

٢) $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل(س ر) **= ١**

مثال : اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالمجموعه {(٠ ،٠.٣) ، (١، ب) ، (٢ ، ٠.٤) } فماقيم ة ب

٣) الحل :حيثَ أن $\sum_{ر=١}^{ن}$ **ل(س ر)** = **١**

فان ⇐٠.٣ + ب + ٠.٤ = ١

= ٠.٧ + ب=١ ⇐ ب= ١- ٠.٧ =٠.٣

تدريب :

س ر	٠	١	٢
ل(س ر)	٠.٢	ب	٠.٥

اوجد قيمة ب

الحل : $\sum_{ر=١}^{ن}$ **ل(س ر)** = ١ ⇐

٠.٢ + ب + ٠.٥ = ١ ⇐ ٠.٧ + ب =١

⇐ ب = ١ -٠.٧⇐ ب = ٠.٣

مثال :

س	٢	٥	٦	١٢
ل(س ر)	٠.٤	٠.٣	٠.٢	ب

هذا الجدول يمثل التوزيع الاحتمالي ل س اوجد قيمة ب اذا كان اقتران احتمال

الحل : $\sum_{ر=١}^{ن}$ **ل(س ر)** = ١ ⇐ **٠.٤ + ٠.٣ + ٠.٢ + ب = ١**

⇐ **٠.٩ + ب = ١ ⇐ ب = ١-٠.٩ = ٠.١**

توزيع ذات الحدين

$$ل(س_ر) = \begin{pmatrix} ن \\ ر \end{pmatrix} (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن-ر} \quad \text{حيث } ر = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ... \}$$

حيث ن : تمثل عدد مرات اجراء التجربه

أ : تمثل احتمال النجاح في المحاوله الواحده

مثال :اذا كان س متغيرا عشوائياً ذا حدين معاملاه ن =٤ ، أ = ٠.٢ فجد كلاً مما ياتي :

١) ل (س =٣) ، $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix} = \frac{٤!}{٣!(٤-٣)!} = \frac{٤ \times ٣!}{١ \times ٣!} = ٤$

٢) ل(س>٣) ،

٣) ل (س < ١)

الحل : ن = ٤ ، أ = ٠.٢ ، ١-أ = ٠.٨

$$\begin{pmatrix} ن \\ ن \end{pmatrix} = ١ ، \begin{pmatrix} ن \\ ٠ \end{pmatrix} = ١$$

١) $ل(س= ٣) = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix} \times (٠.٢)^{٣} \times (٠.٨)^{١}$

٢) $ل (س> ٣) = ل (س = ٤) = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٤ \end{pmatrix} \times (٠.٢)^{٤} \times (٠.٨)^{٠}$

٣) $ل (س< ١) = ل (س = ٠) = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix} \times (٠.٢)^{٠} (٠.٨)^{٤}$

تدريب (٣) اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن = ٥ ، أ= ٠.٣ فجد كلاً مما ياتي :

١) ل(س=٢) ، ٢) ل(س <١) ، ٣) ل (س ≤ ٤)

الحل : ١) $ل (س =٢) = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix} \times (٠.٣)^{٢} \times (٠.٧)^{٣}$

٢) $ل (س < ١) = ل (س = ٠) = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix} (٠.٣)^{٠} (٠.٧)^{٥}$

٣) ل (س ≤ ٤) = ل (س = ٤) + ل (س =٥)

$$\binom{٥}{٤}(٠.٣)^{٤}(٠.٧)^{١}+\binom{٥}{٥}(٠.٣)^{٥}(٠.٧)^{٠}$$

مثال : رميت قطعة نقود غير منتظمه ٥ مرات متتاليه فاذا كان احتمال ظهور الصوره فيها = ٠.٤ فما احتمال ظهور الصوره في ٣ مرات

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠.٤ ر = ٣

$$\text{ل (س = ٣)} = \binom{٥}{٣}(٠.٤)^{٣}\times(٠.٦)^{٢}$$

مثال : كيس يحتوي على ٣كرات خضراء ، ٦ حمراء سحبت ٥ كرات ومع الارجاع فما احتمال ان يكون من بين الكرات المسحوبه ٣كرات حمراء

الحل : ن = ٥ ، ر = ٣ ، أ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

$$\therefore \quad \text{ل (س =٣)} = \binom{٥}{٣}\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$$

مثال : يحتوي كيس على ٣كرات حمراء ، ٧ بيضاء سحبت منه ٥ كرات على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تحصل على ٤ كرات بيضاء

الحل : ن = ٥ ، ر = ٤

ل(ب) = ٠.٧ ، ل (ح) =٠.٣

$$\text{ل (٤)} = \binom{٥}{٤}(٠.٧)^{٤}(٠.٣)^{١}$$

ح ٣ ب ٧

مثال :اذا كان احتمال فوز فريق كرة القدم في أي مبار اه يلعبها = ٢ لعب الفريق ٤ مباريات احسب احتمال فوزه في مباراة واحده فقط . ٣

الحل : ن = ٤ ، ر = ١ ، أ = ٢ / ٣ ل(س = ١) = $\binom{٤}{١}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}$

مثال : اطلق صياد (١٠) طلقات على هدف وكان احتمال اصابة الهدف في كل مره (٠.٩) او جد احتمال أن يصيب الهدف في مره واحده على الاقل .

الحل : ن= ١٠ ، س= ١ ، ٢ ،٣، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠

أ= ٠.٩

ل (مره واحده على الأقل) = ١- ل (٠)

= ١- $\binom{١٠}{٠}$ (٠.٩)^{٠} (٠.١)^{١٠} = ١- (٠.١)^{١٠}

<u>مثال:</u> إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً ما في كل طلقه يطلقها على الهدف يساوي ٠.٧ فإذا أطلق (٥) طلقات على الهدف فما احتمال :

١) إصابة الهدف ٣ مرات ؟
٢) عدم إصابة الهدف ؟
٣) إصابة الهدف مره واحده على الأكثر ؟
٤) إصابة الهدف مره واحده على الأقل ؟

الحل : ن = ٥ ، أ= ٠.٧

١) ر= ٣ ⇐ ل (س=٣) = $\binom{٥}{٣}$(٠.٧)^{٣} (٠.٣)^{٢}

٢) ل(س = ٠) = $\binom{٥}{٠}$ (٠.٧)^{٠} (٠.٣)^{٥}

٣)ل (س ≤ ١) = ل (س= ١) +(س = ٠)

$\binom{٥}{١}$(٠.٧)^{١} (٠.٣)^{٤} + $\binom{٥}{٠}$ (٠.٧)^{٠} (٠.٣)^{٥}

٥) ل (س ≤ ١) = ل (١) +ل (٢) +ل (٣) +ل (٤) +ل (٥)

= ١- ل (٠) = ١- $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٧) ٠ (٠.٣) ٣

تدريب (٤)

مصنع به (٥) آلات من نوع واحد اذا كان احتمال ان تحتاج أي اله الى اصلاح في السنه الخامسه من عمرها هو (٠.٢) فاحسب احتمال :

١) ألا تحتاج أي من الالات الى اصلاح
٢) ان تحتاج اثنتان فقط الى اصلاح
٣) ان تحتاج اثنتان على الاكثر الى اصلاح
٤) أن تحتاج واحده على الاقل الى اصلاح

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠.٢

١) ل (س =٠) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٠ (٠.٨) ٥

٢) ل (س =٢) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٢ (٠.٨) ٣

٣) ل (س ≥ ٢)= ل (٠) +ل(١) +ل (٢)

= $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٠ (٠.٨) ٥ + $\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ١ (٠.٨)٤+ $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٢ (٠.٨)٣

٤) ل (١) + ل (ب) + ل (٣) + ل (٤) + ل (٥)

١-ل (٠) = ١ - $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.٢) ٠ (٠.٨) ٥

تمارين ومسائل

اذا كان س متغيرا عشوائيا ذا الحدين معاملاه ن =٣ ، أ = ٠.٢ جد

أ) قيمة س ⇐ س = { ٠ ، ١ ، ٢ ،٣ }

ب) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

$$ل (٠) = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix} (٠.٢)^{٠} (٠.٨)^{٣} = ٠.٥١٢$$

$$ل (١) = \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \end{pmatrix} (٠.٢)^{١} (٠.٨)^{٢} = ٠.٣٨٤$$

$$ل (٢) = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} (٠.٢)^{٢} (٠.٢)^{٢} (٠.٨)^{١} = ٠.٠٩٦$$

$$ل (٣) = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٣ \end{pmatrix} (٠.٢)^{٣} (٠.٨)^{٠} = ٠.٠٠٨$$

س	٠	١	٢	٣
ل(س ر)	٠.٥١٢	٠.٣٨٤	٠.٠٩٦	٠.٠٠٨

(٢) إذا كانت نسبة الانبات في بذور البندورة تساوي ٨٠% ، وتم زراعة خمس بذرات في احدى الحدائق فما احتمال إنبات :

أ) خمس بذرات

ب) ثلاث بذرات على الاقل

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠.٨

$$أ) ل (س = ٥) = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix} (٠.٨)^{٥} (٠.٢)^{٠}$$

ب) ل (س ≤ ٣) = ل (٣) +ل (٤) +ل (٥)

$$= \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} (٠.٨)^{٣} (٠.٢)^{٢} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} (٠.٨)^{٤} (٠.٢)^{١} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix} (٠.٨)^{٥} (٠.٢)^{٠}$$

(٣) إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج احد المصانع ١٠% فاذا اخذت (٥) قطع من انتاج المصنع بطريقه عشوائيه فما احتمال :

أ) ان لا تجد أي قطعه معيبة

ب) أن يكون بينها قطعه واحده معيبة

ج) أن لا يزيد عدد القطع المعيبة على قطعه واحده

ن = ٥ ، أ = ٠.١

أ) ل (س = ٠) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{٠} (٠.٩) ^{٥}

ب) ل (س = ١) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{١} (٠.٩) ^{٤}

ج) ل (س ≥ ١) = ل (س = ٠) + ل (س = ١)

$\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{٠} (٠.٩) ^{٥} + $\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ (٠.١) ^{١} (٠.٩) ^{٤}

(٤) اذا كان احتمال نجاح عملية جراحيه يساوي ٨٠% فما احتمال نجاح عمليتين على الاقل اذا اجريت ٣ عمليات

الحل : ن = ٣ ، أ = ٠.٨

ل (س ≤ ٢) = ل (٢) +ل (٣) = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (٠.٨) ^{٢} (٠.٢) ^{١} + $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (٠.٨) ^{٣} (٠.٢) ^{٠}

(٥) اذا كانت نسبة التالف من انتاج مصنع لاجهزة الحاسوب ٠.٠٠١ واخذت عينه حجمها(٥) اجهزه بطريقه عشوائيه ، فما احتمال ان تكون جميعها صالحه .

التالف = ٠.٠٠١ ⇐ الصالح = ٠.٩٩٩

ن = ٥ ، أ= ٠.٩٩٩

ل (س =٥) = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٥ \end{pmatrix}$ (٠.٩٩٩) ^{٥}×(٠.٠٠١) ^{٠}

(٦)يحتوي صندوق على اربع كرات بيضاء وست كرات حمراء سحبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع اذا دل المتغير العشوائي س عل عدد الكرات البيضاء المسحوبه كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

ن = ٣ = عدد الكرات البيضاء

٤	٦
ب	ح

اما س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

ل (ب) = ٠.٤

ن = ٣ ، أ = ٠.٤

ل (٠) = $\binom{٣}{٠}$ (٠.٤) ^{٠} (٠.٦) ^{٣} = ٠.٢١٦

ل (١) = $\binom{٣}{١}$ (٠.٤) ^{١} (٠.٦) ^{٢} = ٠.٤٣٢

ل (٢) = $\binom{٣}{٢}$ (٠.٤) ^{٢} (٠.٦) ^{١} = ٠.٢٨٨

ل (٣) = $\binom{٣}{٣}$ (٠.٤) ^{٣} (٠.٦) ^{٠} = ٠.٠٦٤

س	٠	١	٢	٣
ل (س ر)	٠.٢١٦	٠.٤٣٢	٠.٢٨٨	٠.٠٦٤